FACULDADE PEDRO II
Licenciatura em Matemática

MODELO DE VAN HIELE E A GEOMETRIA DINÂMICA:*
Formas de abordagem para a melhoria do ensino-aprendizagem da geometria*

Autora: Thiara Cristina de Oliveira**

Orientador: Marcelo de Moura Costa***

RESUMO:

Este trabalho visa apresentar um estudo sobre o ensino da geometria e aprendizagem dentro do sistema escolar em conjunto da demonstração do modelo de Van Hiele, que auxilia no entendimento do problema tanto por parte da demonstração do professor quanto da visualização do aluno. A Teoria de Van Hiele responde a questão de como ocorre o aprendizado e a abordagem de como ser utilizado e aplicado. O problema da abstração e não visualização de figuras seria superado com o uso da geometria dinâmica, aumentando o alcance da geometria na ação em conjunto com os professores. Esta é uma pesquisa documental de cunho qualitativo, onde foram utilizados artigos que pudessem responder a questão de como melhorar o ensino da geometria em sala de aula, e são feitas demonstrações por parte da autora da utilização de softwares que ajudassem na visualização geométrica. Os resultados do Modelo de Van Hiele apresentam um guia para a aprendizagem e para a avaliação das habilidades dos alunos em geometria, apresentando os cinco níveis de compreensão (visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor). Com a explicação dos níveis, fases de aprendizagem, abordagem e aplicabilidade do Modelo de Van Hiele, chega-se ao entendimento que o estudo orienta o professor para a melhoria do ensino da geometria, favorecendo também o aproveitamento do aluno com a utilização de tecnologia e softwares a favor da educação dentro da sala de aula.

Palavras Chave: Ensino de Geometria; Modelo de Van Hiele; Geometria Dinâmica; Software Educacional; GeoGebra.

ABSTRAT:

This paper aims to present a study on the teaching and learning of geometry in the school system within the demonstration of the Van Hiele model, which assists in

*Artigo apresentado, como requisito parcial, para obtenção do título de graduação em matemática, modalidade licenciatura.

**Aluna do curso Licenciatura em Matemática, do período de 1º semestre 2015 ao 1º semestre 2019.

***Esp. pela Universidade Federal de Lavras (2004); Ms pela Universidade Federal de Juiz de Fora (2013).

understanding the problem both on the parts of the teacher's demonstration and the student's visualization. Van Hiele's Theory answers the question of how learning occurs and the approach to how to use and apply it. The problem of abstraction and non-visualization of figures would be overcome with the use of dynamic geometry, increasing the scope of geometry in action with teachers. This is qualitative documentary research, where articles were used that could answer the question of how to improve the teaching of geometry in the classroom, and the author makes demonstrations of the use of software that helps in the geometric visualization. The results of the Van Hiele Model provide a guide for the learning and assessment of students' abilities in geometry, presenting the five levels of comprehension (visualization, analysis, informal deduction, formal deduction and rigor). With the explanation of the levels, phases of learning, approach, and applicability of the Van Hiele Model, we come to the understanding that the study guides the teacher to improve the teaching of geometry, also favoring the student's, with the use of technology and software in favor of education within the classroom.

Keywords: Geometry Teaching, Van Hiele Model, Dynamic Geometry; Educational Software; GeoGebra.

INTRODUÇÃO

Uma afirmação muito comum de se ouvir dentro de salas de aula, e até mesmo fora delas, é que a Matemática e a Geometria estão em tudo que vemos e convivemos. No entanto, é muito mais fácil de dizer do que realmente de demonstrar tal afirmação. É evidente a dificuldade de se aprender e ensinar a geometria dentro de classe.

Em consequência dessa complexidade surgem relutância e resistência por parte de alunos e professores quando se fala sobre a disciplina. Os livros didáticos trazem a geometria em suas últimas páginas, e a escola coloca essa importante matéria como algo a ser estudado superficialmente no fim de semestres.

Embasado nesse contexto, surgiu à necessidade de procurar métodos que auxiliem a professores e alunos a solucionar esse distanciamento que surgiu entre a geometria e seu entendimento.

Na busca de novas abordagens dentro de sala de aula que pudessem facilitar o ensino-aprendizagem de geometria, surgiu o entendimento de que é muito delicado de buscar soluções para como ensinar sem ao menos saber como o aprendizado de fato ocorre. Então a Teoria de Van Hiele foi fundamental, pois não só respondia ao questionamento de como ocorre esse aprendizado, como também traz uma abordagem de como deve ser empregado cada etapa do ensino.

O modelo Van Hiele, não é uma fórmula direta como solucionar todos os problemas presentes em sala de aula, mas serve como um auxiliar de como se dá a aquisição do conteúdo por parte do aluno, deixando o professor livre para realizar suas próprias abordagens.

Com o uso das tecnologias cada vez mais presentes no dia a dia, o seu uso tem se mostrado um grande facilitador em diversas áreas, fazendo erguer-se o questionamento de como poderiam ser utilizadas a favor da educação.

A abstração e a não visualização de figuras é um obstáculo a ser superado. A interatividade dos objetos de estudo com o uso de softwares pode ser de grande valia quando se trata do ensino e aplicação da geometria. Se esses recursos já estão disponíveis, por que não utilizá-los para obter uma melhoria aquisição de conhecimentos?

A presente pesquisa propõe uma abordagem onde o modelo Van Hiele e o uso da geometria dinâmica agindo em conjunto como colaboradores para o aperfeiçoamento do ensino-aprendizagem dentro e fora de sala de aula.

METODOLOGIA

Foram adotadas para a produção desse artigo pesquisas documentais de cunho qualitativo onde foram lidos diversos artigos a fim de responder a questão de como se pode melhorar o ensino e aprendizagem da matemática, sobre tudo da geometria em sala de aula.

De acordo com Silveira e Córdova (2009, p. 32) os pesquisadores que utilizam os métodos qualitativos buscam explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas nem se submetem à prova de fatos, pois os dados analisados são não métricos (suscitados e de interação) e se valem de diferentes abordagens.

Desse modo a presente pesquisa busca explorar meios a serem adotados em sala de aula para ajudar a professores e alunos a chegar a um consenso para obter melhores resultados no ensino da geometria dentro de sala de aula, analisando os dados conseguidos por outros pesquisadores sem, no entanto, ter a obrigatoriedade da realização de experimentos próprios.

Com esse estudo foi possível chegar a Teoria de Van Hiele, como um contribuinte aos professores na hora da produção e execução de seus planos de aula e contribuir para a participação ativa dos alunos no ensino/aprendizagem, e na geometria dinâmica com o uso dos softwares matemáticos, um auxiliar para a demonstração de objetos e suas propriedades que, por terem um alto nível de abstração, são de difícil compreensão por parte dos alunos e difícil de efetivação por parte dos professores quanto a representação utilizando quadro e pincel.

APRESENTANDO O MODELO VAN HIELE

O modelo de Van Hiele do pensamento geométrico apresenta um guia para a aprendizagem e para a avaliação das habilidades dos alunos em geometria, apresentando cinco níveis de compreensão. Este estudo foi um trabalho realizado pelos professores holandeses Pierre Van Hiele e sua esposa, Dina Van Hiele-Geldof, que investigavam o desenvolvimento do pensamento geométrico. Para isso eles fundamentaram-se na Teoria Psicogenética, também conhecida como concepção construtiva da formação da inteligência, teoria esta desenvolvida pelo psicólogo suíço Jean Piaget.

Os resultados dessas investigações foram duas teses de doutorado, publicadas em 1959. Após a publicação das teses Dina veio a falecer, e Pierre ficou responsável por reformular e desenvolver o modelo em si.

Esse estudo só não ficou complemente desconhecido porque a União Soviética o adotou nos 60, quando houve a reformulação do currículo de geometria em suas escolas e implementado na metade da década. Desde esta época o modelo não era utilizado em nenhuma outra parte do mundo. Na década de 70 surgiram várias projetos de pesquisas nos Estados Unidos. De modo geral, tais pesquisas objetivavam testar a validade do modelo, a viabilidade e as vantagens de sua aplicação.

Em 1973, Hans Freudenthal publicou um livro intitulado "Mathematical as an Educational Task", onde citava o modelo Van Hiele e em 1976 o professor americano Izaak Wirsup começou a divulgar o modelo em seu país. Foram feitas traduções para o inglês feitas em 1984, a partir disso o interesse pelas contribuições dos Van Hiele tem se tornado cada vez maior.

O modelo consiste em cinco níveis de compreensão, chamadas visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. Esses níveis de compreensão são individuais, ou seja, diferem de indivíduo para indivíduo com base nas suas experiências e em processos de ações educativas vivenciadas por cada um. Esses níveis de pensamentos ocorrem independentes do crescimento cronológico e de sua idade.

Sendo assim, um aluno pode apresentar o mesmo nível de pensamento que outro mais novo ou mais velho que ele, por exemplo.

Segundo Freudenthal (1996 apud Kallef, 1994) "quando o ensino ocorre num nível acima ao do estudante, o conteúdo não é bem assimilado e não fica retido por muito tempo na memória, assim como concepções erradas, quando aprendidas, parecem persistir."

Para Piaget, o desenvolvimento do pensamento da criança seguem etapas de acordo com a idade:

> Para os professores encaminharem um bom trabalho em sala de aula, no sentido de não só desenvolverem atividades com situações concretas, mas com aquelas que envolvem processos de abstração, eles precisam conhecer os processos mentais que cada aluno vivencia em cada estádio e, tendo isto por base, tentar desenvolver atividades que reconstruam os conhecimentos que devem ser ensinados, adaptados às estruturas e idades adequadas. (MONTOITO e LEIVAS, 2012, p.26)

Ao contrário do apresenta a Teoria de Piaget, o processo do pensamento geométrico defendido pelos Van Hiele independe de sua idade e de sua maturidade.

O modelo Van Hiele denota acerca da dessimetria com que o ensino e a aprendizagem da Matemática são tratados nas escolas. Não são levados em consideração os diferentes níveis de pensamentos dos estudantes, os contrastes entre o aprendizado individual de cada sujeito ou mesmo as linguagens utilizadas pelos alunos e professores. Chama a atenção para o fato de que, em uma sala de aula, alunos apresentam níveis de pensamento diferentes e, além disso, eles apresentam modos diferentes de pensar dos professores, visto que, costumam empregar com frequência palavras e objetos distintos dos utilizados em sala de aula e livros didáticos.

De acordo com Van Hiele, deficiências em geometria são devidas ao fato de que o currículo geralmente é apresentado em um nível mais alto do que os dos alunos, eles não compreendem o professor e o professor, por sua vez, não compreendem o porquê deles não compreenderem. Nesse desentendimento não há assimilação e acomodação correta da informação por parte do aluno e isso acaba comprometido o aprendizado dos conceitos matemáticos no geral e, sobre tudo os geométricos.

OS NÍVEIS DE VAN HIELE

A ideia principal do modelo Van Hiele é que os alunos progridam de acordo com uma sequencia de níveis de compreensão de conceitos. Esses níveis podem ser utilizados de formas auxiliares pelo professor ao elaborar suas aulas e atividades a serem desenvolvidas dentro de sala de aula e também para avaliar as habilidades do aluno. Vale lembrar que o modelo de Van Hiele só encaminha e orienta o professor, todavia, não é necessariamente uma restrição de como deve ser aplicadas todas as atividades. Nesse preceito, o professor é livre para escolher como ser dará a aplicação do método.

Sendo assim, os cinco níveis propostos pelo modelo de Van Hiele são:

NÍVEIS	**CARACTERÍSTICAS**
Primeiro nível **Visualização ou Reconhecimento**	Nesse nível os alunos passam a reconhecer as figuras por suas formas e aparência, sem relacionar, no entanto com suas propriedades e conceitos. Sua percepção é apenas visual e as figuras são comparadas a objetos e figuras do seu cotidiano e são identificadas apenas pelo seu aspecto geral.
Segundo Nível **Análise**	Os alunos são capazes de perceber propriedades e elementos da figura, mas ainda não fazem a inclusão de classes pertencentes.
Terceiro Nível **Dedução informal ou Ordenação**	Os alunos são capazes de relacionar propriedades das figuras com suas respectivas classes, entretanto neste nível os alunos acompanham uma prova formal, mas não são capazes de construir outra por si só.
Quarto Nível **Dedução Formal**	Os alunos já são capazes de formular uma prova formal geométrica, compreendendo as propriedades das figuras e ainda entender o papel dos axiomas, raciocinando num contexto de um sistema matemático completo.
Quinto Nível **Rigor**	Os alunos são capazes de compreender a geometria não euclidiana e também comparar sistemas baseados em diferentes axiomas, mesmo na ausência de modelos concretos.

Quadro 1: Níveis do modelo Van Hiele

Fonte: Adaptado de ALVES, G.S; SAMPAIO, F.F. (2010, p. 70)

Segundo o modelo de Van Hiele, caso sejam desenvolvidos todos os níveis de aprendizagem, há o favorecimento do "insight", ou seja, melhoria na aquisição do nível de pensamento geométrico em determinação assunto estudado.

FASES DE APRENDIZAGEM

Além dos níveis de aprendizagem, o modelo de Van Hiele apresenta fases sequenciais de aprendizagem. Com essas fases de aprendizagem, o modelo propõe que o professor passe cada uma dessas fases para que ele tenha plena certeza da fixação do conteúdo apresentado aos alunos, antes de subir um nível no modelo.

> Também a importância de se levar em conta o "conhecimento prévio" dos alunos na construção de significados geralmente é desconsiderada. Na maioria das vezes, subestimam-se os conceitos desenvolvidos no decorrer da atividade prática da criança, de suas interações sociais imediatas, e parte-se para o tratamento escolar, de forma esquemática, privando os alunos da riqueza de conteúdo proveniente da experiência pessoal. (PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS, 1998, p. 22)

Já em sua primeira fase de aprendizagem, o modelo vem para preencher uma defasagem questionada pelos PCNs, onde deve ser entendida a experiência anterior do aluno sobre o tema a ser desenvolvido, e a partir desse conhecimento, dar sequencia aos estudos.

As fases de aprendizagem propostas pelo modelo Van Hiele são:

- FASE 1 – INTERROGAÇÃO OU INFORMAÇÃO

O professor e aos alunos estabelecem um diálogo, onde será possível ao professor verificar quais as habilidades e conhecimentos prévios dos alunos sobre o objeto a ser estudado. Nessa fase ainda não há aquisição do nível.

- FASE 2 - ORIENTAÇÃO DIRIGIDA OU DIRETA

Os alunos devem verificar e explorar o objeto a ser estudado através de atividades e materiais selecionados previamente pelo professor. É importante que as atividades sejam ordenadas em níveis graduais de dificuldades e que possibilitem ao aluno respostas específicas e objetivas, para que percebam por si mesmos as propriedades, conceitos e definições que o professor quer atingir. Ainda possuem um baixo nível de aquisição.

- FASE 3 – EXPLICITAÇÃO

É hora de retornar ao diálogo e permitir que o aluno exponha as experiências adquiridas na fase anterior de modo oral ou escritas. O papel do professor será de mediador dentre os alunos em linguagem específica do nível no intuito de chegarem a um comum acordo com relação ao tema estudado. Nessa fase não há introdução de conceitos novos, somente troca de experiências e o nível de aquisição do conteúdo por parte dos alunos é considerada ainda intermediária.

- FASE 4 – ORIENTAÇÃO LIVRE

Nessa fase, serão aplicadas tarefas novamente, mas em um grau de dificuldade maior que na fase 2. Essas tarefas e atividades deverão ser de múltiplas etapas, exercícios abertos com maiores modos de resolução possíveis que possibilitem aos alunos serem independentes na busca das respostas e ganhem experiências próprias para tornar claras as relações entre os objetos de estudo. A participação e interferência do professor nessa fase deve ser o mínimo possível. De acordo com o modelo, só saberemos se houve a compreensão quando o aluno, ao ser exposto a um novo problema consegue achar uma solução por si só. Na fase 4 o aluno já tem um alto grau de aquisição do nível de raciocínio.

- FASE 5 – INTERAÇÃO

A última fase é de revisão e síntese de tudo que foi observado e estudado nas fases anteriores, visando a unificação de todo o conteúdo para ser assimilado e internalizado por parte dos alunos. O papel do professor agora deve ser de orientar e expor exemplos e experiências, sem apresentar novos conteúdos e ideias. Essa fase é importante, pois em alguns casos os alunos podem não recordar de conteúdos apresentados nas aulas anteriores. Aqui o aluno já tem a aquisição do nível completa e pode passar para o nível seguinte.

Ao fim das cinco fases de aprendizagem é esperado que os alunos tenham alcançado o próximo nível de pensamento e estejam qualificados e aptos para avançar para o próximo nível. Essas fases deverão ser repetidas a cada nível do modelo Van Hiele para que seja assegurado que a compreensão esteja completa por parte dos alunos.

Quanto à metodologia a ser utilizada, o modelo de Van Hiele identifica algumas generalizações que caracterizam o método, tais como:

1- O método parte de uma teoria de desenvolvimento, portanto, presume-se que, para que o aluno atue com sucesso em um nível, o mesmo necessita ter adquirido o nível anterior, não permitindo que salto nenhum nível. Não se pode avançar para o nível *n* sem haver passado antes pelo nível *n-1*.

2- O progresso entre os níveis depende mais do conteúdo e métodos de ensino recebidos que da idade dos alunos em questão.

3- Objetos pertinentes a um nível se transformam em objetos de estudos para o nível seguinte. Por exemplo: As formas das figuras que são identificadas em um nível se transformam em propriedades serem aprofundadas e estudadas no nível seguinte. Os Van Hiele atentam que é possível ensinar a um aluno habilidades acima de seu nível, todavia, o entendimento por parte do aluno poderá não ocorrer de forma satisfatória.

4- Cada nível tem seus próprios símbolos linguísticos, ou seja, sua própria linguagem e sistema de relações que conectam esses símbolos. Sendo assim, uma linguagem que é bem aceita em um nível por ser informal e de fácil compreensão por parte dos alunos, pode se modificar para tornar mais formal para se tornar correta geométrica e matematicamente representada no nível seguinte.

De acordo com os estudos realizados para esta pesquisa, nota-se uma semelhança em sua maioria que os resultados obtidos nos primeiros níveis foram melhores se comparados aos níveis mais elevados, levando a entender que com o passar dos níveis, aumentando a dificuldade das atividades vão diminuindo a contagem de alunos que conseguem realizar as tarefas corretamente. Como demonstrado no quadro a seguir:

GRAUS DE AQUISIÇÃO	QUADRO GERAL					
	Nível 1		Nível 2		Nível 3	
	Alunos	%	Alunos	%	Alunos	%
Aquisição Completa (AC)	37	34,58	3	2,80	0	0
Alta Aquisição (AA)	32	29,91	22	20,56	6	5.61
Aquisição Intermediária (AI)	26	24,30	39	36,45	28	26,17
Baixa Aquisição (BA)	11	10,28	32	29,91	26	24.30
Não Aquisição (NA)	1	0,93	11	10,28	47	43,92

Quadro 2: Distribuição de alunos conforme seus níveis de raciocínio e os diferentes graus de aquisição dos níveis de 1 ao 3.

Fonte: Adaptado de ALVES, G.S; SAMPAIO, F.F. (2010, p. 73)

Alves e Sampaio (2010, p. 71) citam, entre outros o Projeto Óregon (1981), onde os professores Willian Burger, Alan Hoffer, Bruce Mitchell e Michael Shaughnessy, que investigaram os parâmetros do pensamento geométrico de modo a validar o modelo, a viabilidade e vantagens da aplicação da Teoria dos Van Hiele. As pesquisas contaram com 48 estudantes da escola básica e foram abordados assuntos como quadriláteros e triângulos, os mesmos foram avaliados por entrevistas orais para a verificação dos níveis de raciocínio de geometria. Concluíram que, utilizando os diversos níveis do modelo, tais indicadores ajudavam a perceber os processos de pensamento dos alunos em tarefas geométricas e que os alunos demonstravam comportamento de acordo com o esperado e apresentado pelo modelo, onde houve melhoras significativas no pensamento geométrico individual.

Isso demonstra que, mesmo tendo o modelo Van Hiele como base para o ensino, ainda há uma grande dificuldade por parte dos alunos no aprendizado da geometria. Todavia os resultados foram melhores que, se comparado, quando não houve a aplicação do modelo.

GEOMETRIA DINÂMICA: UMA ABORDAGEM PARA O MODELO DE VAN HIELE

A proposta pedagógica elaborada a partir do modelo de Van Hiele pode ser implementada de variadas formas, dependendo de o docente escolher a que melhor lhe atende durante suas práticas de ensino. Sendo assim, aberto o leque de possibilidades, destaca-se o uso da geometria dinâmica alicerçado pela utilização de softwares que possibilitam ao professor uma forma auxiliarem na tarefa do ensino da geometria e aplicação do método.

De acordo com Alves e Sampaio (2010, p. 74) "Dynamic Geometric" é uma marca registrada da Key Curriculum Press, Inc, responsável pela comercialização do software The Geometer's Sketchpad. O termo é normalmente utilizado para caracterizar programas geométricos interativos que permitem a criação e manipulação de figuras geométricas a partir de propriedades. Desse modo, a geometria dinâmica vem como um auxiliar para o ensino geométrico, mas nunca como referência a uma nova geometria.

> Mudanças na definição de objetivos para o ensino fundamental, na maneira de conceber a aprendizagem, na interpretação e na abordagem dos conteúdos matemáticos implicam repensar sobre as finalidades da avaliação, sobre o que e como se avalia, num trabalho que inclui uma variedade de situações de aprendizagem, como a resolução de problemas, o trabalho com jogos, o uso de recursos tecnológicos, entre outros. (PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS, 1998, p.41)

A partir da análise de algumas características é possível perceber como a utilização da tecnologia, através da geometria dinâmica, pode colaborar para a superação de inúmeras dificuldades encontradas no processo de ensino-aprendizagem da geometria, resgatando dois aspectos tão esquecidos quanto importantes no ensino da matemática: o intuitivo e o lógico.

> Quanto aos softwares educacionais é fundamental que o professor aprenda a escolhê-los em função dos objetivos que pretende atingir e de sua própria

> concepção de conhecimento e de aprendizagem, distinguindo os que se prestam mais a um trabalho dirigido para testar conhecimentos dos que procuram levar o aluno a interagir com o programa de forma a construir conhecimento. (PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS, 1998, p.35)

Esses softwares possibilitam ao usuário que, seja professor ou aluno, crie um objeto geométrico partindo de suas propriedades, tornando acessível e manipulável em tempo real, dando a impressão de realismo e concretização, o que antes era abstrato e estático. Esses sistemas ampliam o campo de experimentação se comparado ao oferecido no ambiente papel e lápis e/ou quadro e pincel, possibilitando novas formas de visualização e resolução de problemas matemáticos.

Com a possibilidade de manipular o objeto geométrico estudado surge uma nova forma de pensar e fazer matemática, configurando-se uma extensão do pensamento do indivíduo.

> O ambiente de geometria dinâmica amplia as possibilidades de estabelecerem coordenações de ações que conduzem os estudantes a criarem relações corretas do ponto de vista matemático. Isso se deve ao fato do ambiente oferecer um suporte que permite manipulações e transformações geométricas enriquecedoras do pensamento espacial, o que, por sua vez, torna-se uma base importante para a compreensão de conceitos geométricos abstratos. NOTARE E BASSO (2016, p.9)

A manipulação de objetos geométricos permite que os alunos possam experimentar, analisar e refletir sobre ideias e modificá-las quando necessário, sem que no entanto se perca todo o trabalho realizado anteriormente. Com o software é possível não somente a criação de figuras, mas também o estudo de suas propriedades, pois são a partir delas que o programa criará a imagem e o indivíduo poderá elaborar demonstrações e tirar suas próprias conclusões. O uso do software permite que sejam geradas imagens menos restritas, alargando o campo de experimentação.

Durante a pesquisa, pode-se notar a predominância do software GeoGebra como meio de aplicação e investigação. Criado por Markus Hohenwarter durante sua tese de mestrado em 2001, o GeoGebra foi elaborado para ser utilizado em ambiente de sala de aula em todos os níveis de ensino. O software de fácil acesso, é bastante utilizado por profissionais da área educacional. O programa pode ser baixado diretamente da internet sem custos ou mesmo utilizado em uma plataforma online no próprio site. No site também é possível encontrar diversos tutoriais e materiais para serem estudados. Sendo assim é fácil perceber por que ele tem tanta primazia e preferência entre profissionais da área educacional. Tais características, renderam ao GeoGebra 8 prêmios até a data desta pesquisa, entre eles Prêmio Internacional de Software Livre na categoria de Educação em 2005 na França.

Na Teoria de Van Hiele, o primeiro nível ressalta a importância da visualização, e somente a partir daí que é possível fazer o estudo de suas propriedades e conceitos. O GeoGebra permite, além da visualização em 2D (duas dimensões), que se crie objetos em visualização 3D (três dimensões), dando ainda mais oportunidades de o professor aperfeiçoar suas aulas e maximizar o processo de ensino-aprendizagem.

A utilização do GeoGebra durante as aulas pode levar ao processo de formação e desenvolvimento de conceitos por parte do professor, buscando ao mesmo tempo contribuir para a construção do conhecimento do aluno, na medida que ele possibilita a revisitação ou aquisição de conteúdos novos. O emprego do programa durante as aulas faz com que o aluno seja uma parte integrante na hora da construção de imagens ou objetos a serem estudados, ao invés de só acompanhar a construção feita pelo professor.

APLICABILIDADE DO MODELO VAN HIELE COM AUXÍLIO DA GEOMETRIA DINÂMICA

De acordo as generalizações do modelo de Van Hiele um aluno não pode avançar um nível do modelo sem comprometer a aprendizagem do pensamento geométrico, no entanto o contrário, quando são sequenciados, é possível relacionar os níveis entre si. A explorar um nível o subsequente deverá utilizar-se das propriedades estudadas no anterior, como por exemplo: ao se utilizar das propriedades do retângulo (nível 2 - analise) para provar que ele é um paralelogramo (nível 3 - Ordenação). As fases de aprendizagem devem ser aplicadas em cada um dos níveis, para que o diálogo e o entendimento do aluno sejam mantidos como o foco durante toda a atividade. Sendo assim, no decorrer de cada atividade e o intervalo entre uma e outra, o professor deve estimular o aluno a buscar seu próprio conhecimento a partir de suas experiências e retirar dúvidas sempre que necessário, direcionando-os ao resultado planejado.

Foi então elaborada uma atividade para demonstração da aplicabilidade do método de Van Hiele utilizando o software GeoGebra na versão 6.0. Para a atividade é pedido que os alunos que construam uma série de figuras. No decorrer da atividade devem analisar as construções e responder uma sequencia de perguntas.

1 - NÍVEL 1 DO MODELO DE VAN HIELE (visualização)

Pede-se aos alunos, como exercício inicial que construam um retângulo ABCD com as proporções de 6 unidades de altura e 10 unidades de comprimento utilizando a ferramenta de polígono semi-deformável.

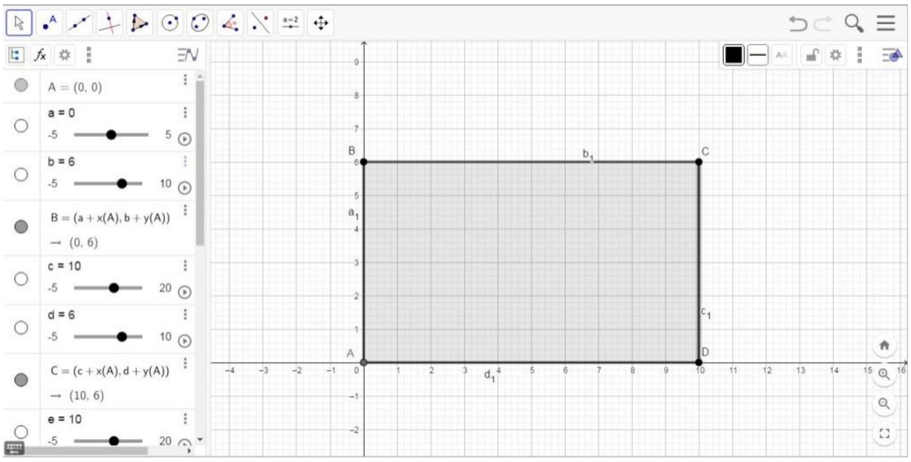

FIGURA 1: Construção do Retângulo semi deformável Fonte: Elaborado pela autora

A ferramenta de polígono semi deformável cria controles deslizantes que garante que 3 dos vértices desse retângulo (B C e D) poderão sofrer alterações, possibilitando a mudança de sua forma inicial, para que os alunos possam observar as variações que ocorrerão ao mover seus vértices ou utilizar, enquanto ao escolher e mover o vértice inicial A pode-se mover a figura sem modificar suas formas.

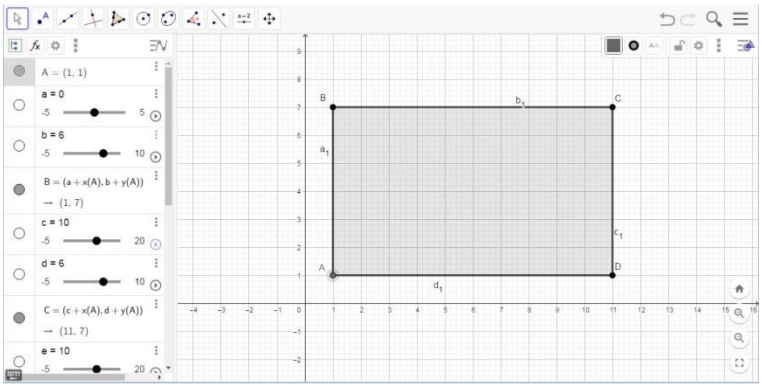

FIGURA 2: Movimentação do vértice A Fonte: Elaborado pela autora

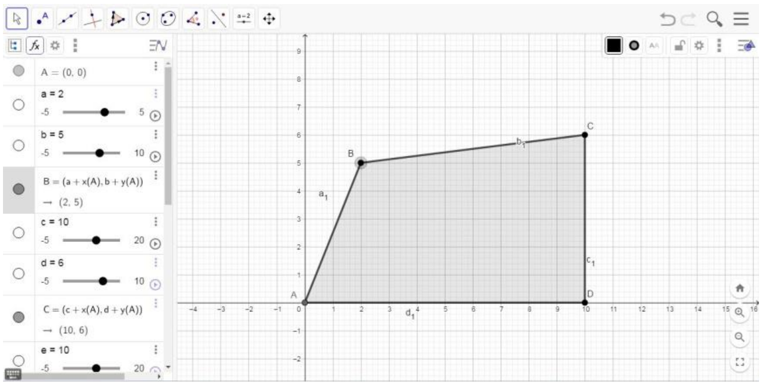

FIGURA 3: Movimentação do vértice B Fonte: Elaborado pela autora

Em seguida os alunos devem inserir os pontos médios nos lados do retângulo e construir um polígono partindo desses pontos. A partir de suas formas o aluno deve identificar as figuras geométricas formadas pela construção feita. Nesse pequeno exercício inicial de identificar os objetos geométricos construídos, mesmo sem levar em consideração as propriedades e somente comparando a experiências anteriores, já estará sendo aplicado o nível 1 de Van Hiele (visualização).

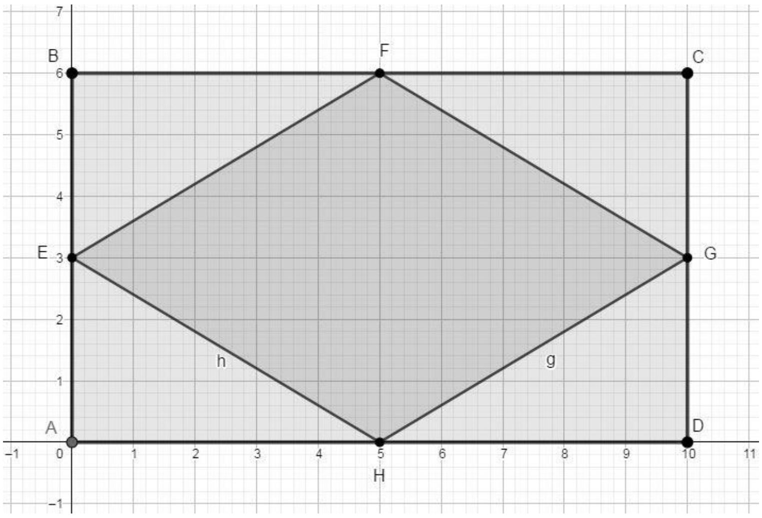

FIGURA 4: Losango formado pelos pontos médios de um retângulo6 Fonte: Elaborado pela autora

O aluno deve ser capaz de um losango EFGH e 4 triângulo HAE, EBF, FCG e GDH, além do próprio retângulo ABCD que ainda se mantém ao redor de todas as outras figuras.

2 - ***NÍVEL 2 DO MODELO DE VAN HIELE (análise)***

Nesse nível os alunos começam a perceber conceitos geométricos, fazendo análises das características das figuras e se utilizam muito de observação e experimentação.

Para a aplicação o nível 2 de van Hiele (análise) é pedido que os alunos respondam as seguintes questões:

1. *Qual o número de lados de cada um dos polígonos?*

Retângulo e Losango têm 4 lados cada, enquanto os triângulos tem 3 lados cada.

2. *Qual o número de vértices?*

Retângulo e losango tem 4 vértices, enquanto os triângulos tem 3 vértices.

3. *Movendo o ponto C na figura e responda:*

3.1. O que ocorre com a forma dos triângulos?

Para isso o aluno pode explorar das opções que o software disponibiliza para responder a questão, levando em consideração os seus ângulos e medidas dos lados, etc. e comparar as medidas obtidas entre si.

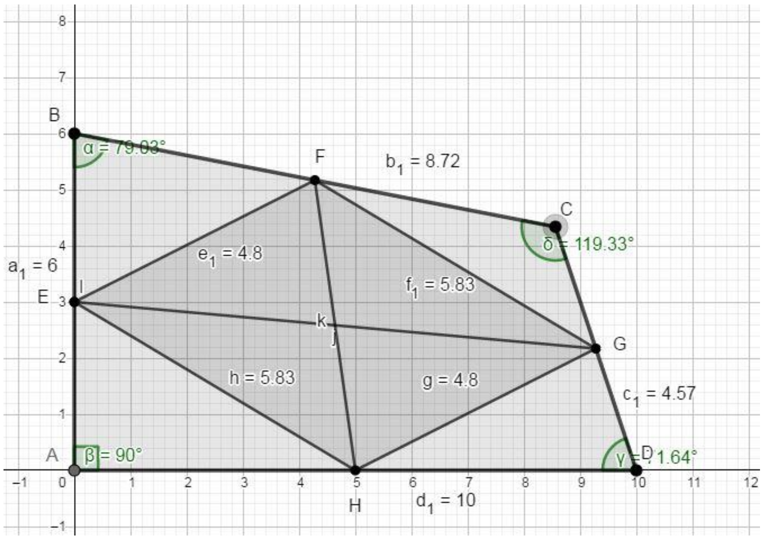

FIGURA 5: Movimentação do ponto C para região central do Retângulo Fonte: Elaborado pela autora

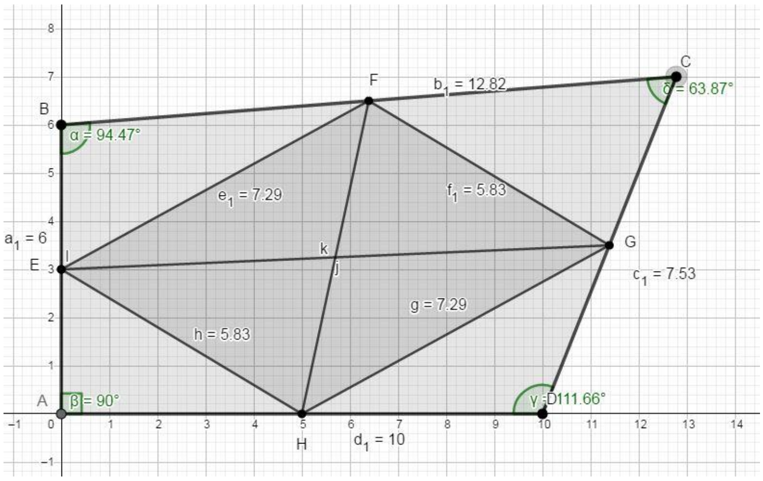

FIGURA 6 : Movimentação do ponto C para região fora do Retângulo Fonte: Elaborado pela autora

A conclusão é que triângulos deixam ser semelhantes entre si e caso continue movendo o ponto C para a área dentro do retângulo o triângulo HAE irá se manter como o original e os triângulos EBF e GDH ficarão cada vez mais agudos, ao mesmo tempo que o triângulo FCG tornar-se-á mais obtuso.

No entanto, se movido para a área de fora do retângulo, o triângulo se manterá como o original, enquanto os triângulos EBF e GDH se tornarão obtusos e o triângulo FCG ficará cada vez mais agudo.

3.2. O que acontece com a forma do retângulo?

O retângulo deixa de ser retângulo, pois pelas propriedades do retângulo os quatro ângulos internos devem ser necessariamente retos.

3.3. O que acontece com a forma do losango?

Perde a forma de losango, que pelas definições precisam ter todos os lados com a mesma medida.

3 - NÍVEL 3 DO MODELO DE VAN HIELE (*Dedução informal ou Ordenação*)

Enquanto no nível 2 os alunos não correlacionar as propriedades de diferentes figuras entre si e as propriedades se dão mais por meios de observação, no nível 3 já são capazes de entender uma demonstração, mas não elaborar uma prova completa por si só. No nível 3 também os alunos serão capazes de fazer a inclusão de classe das figuras comparando as propriedades de cada uma.

Considerando a figura 4, desfazendo as alterações feitas, os alunos devem responder as seguintes questões:

1. *Sabendo que os quadriláteros são figuras com quatro lados, quais dos polígonos se encaixam nessa definição?*

De acordo com a figura 4, somente o retângulo e o losango são quadriláteros.

2. *Paralelogramos são polígonos cujos lados opostos são paralelos, logo trace uma reta paralela a um dos dois lados de cada figura e mova a até o lado oposto. A partir dessa demonstração quais polígonos são considerados paralelogramos?*

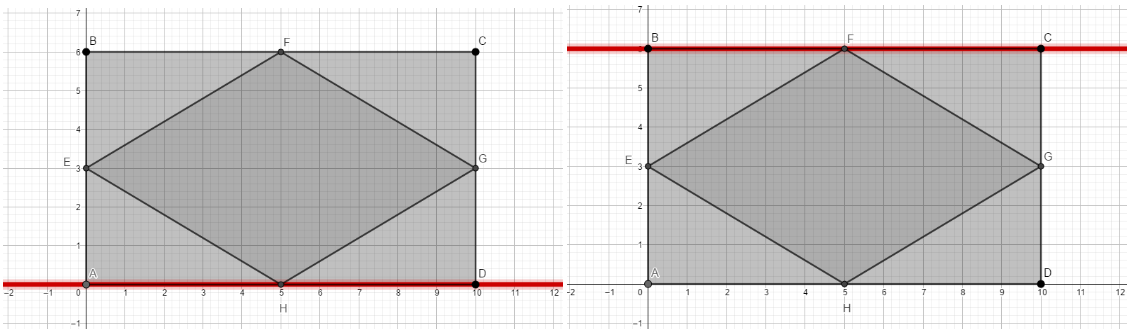

FIGURA 7: Movimentação da paralela do lado AD até o lado BC Fonte: Elaborado pela autora

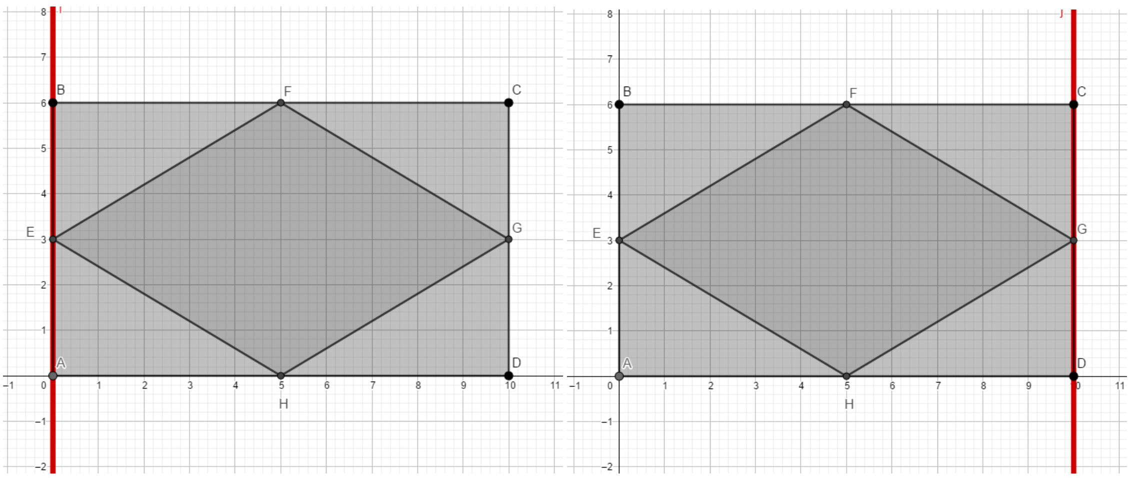

FIGURA 7: Movimentação da paralela do lado AB até lado CD Fonte: Elaborado pela autora

A partir dessa demonstração é possível ao aluno visualizar que o retângulo é um paralelogramo, pois seus lados AD e BC são paralelos, enquanto o lado AB é paralelo ao lado CD.

Do mesmo modo é possível criar uma paralela no lado EF do losango e movê-la ao até o lado GH para provar que coincidem. Repetindo a ação com os lados HE e FG, é possível demonstrar que o losango é um paralelogramo.

Com relação ao triângulo, todo os lados possuem um ponto de interseção, logo não há lados paralelos.

3. *Quanto a classificação dos triângulo é possível dizer que são todos triângulos retângulos?*

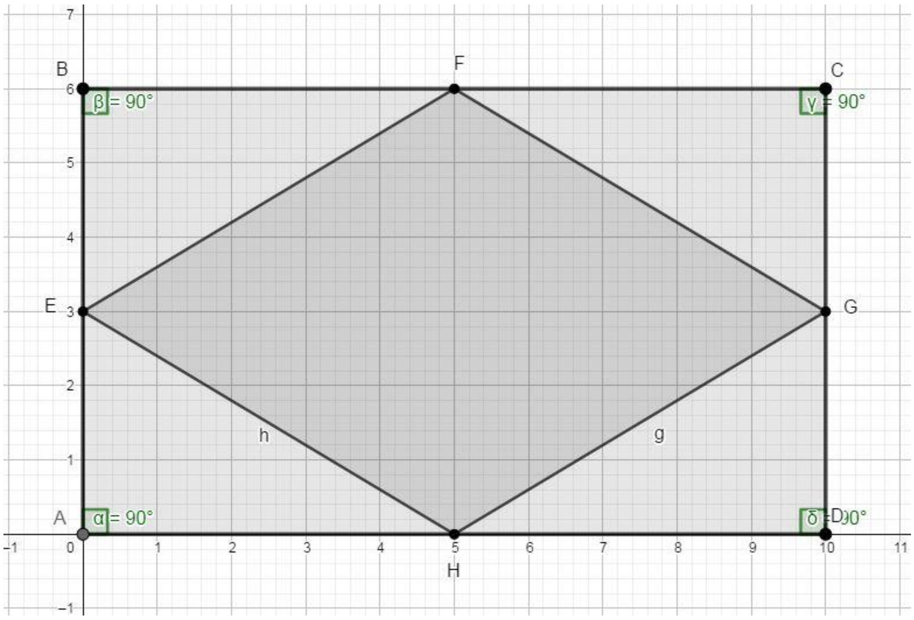

FIGURA 8: Ângulos de 90° nos triângulos Fonte: Elaborado pela autora

Triângulo retângulo, em geometria, é um triângulo que possui um ângulo reto e outros dois ângulos agudos, logo é possível afirmar que os quatro triângulos HAE, EBF, FCG e GDH, se classificam como triângulos retângulos.

4 - NÍVEL 4 DO MODELO DE VAN HIELE (Dedução formal)

No nível 4 do modelo de Van Hiele os alunos são capazes de desenvolver sequências mais longas de enunciados e resolver atividades baseando-se em outras demonstrações. È capaz de entender o papel dos axiomas, teoremas e provas.

1. *Na figura construída para os exercícios anteriores, qual medida do lado EH no triângulo HAE?*

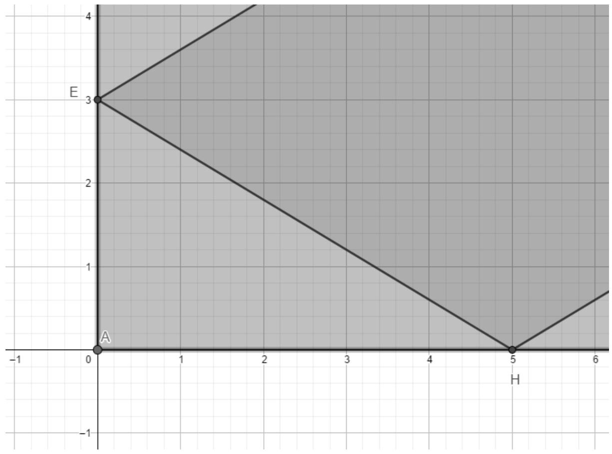

FIGURA 9: Triângulo HAE Fonte: Elaborado pela autora

Para resolver a atividade é preciso explicar aos alunos sobre o Teorema de Pitágoras, pois o lado do triângulo corresponde a hipotenusa do triângulo. O enunciado do Teorema tem a seguinte definição:

A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos.

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$$

Há diversos modos de demonstrar o Teorema de Pitágoras e fica a escolha do professor demonstrá-lo como achar se mais confiante. Aqui será demonstrado através da construção de quadrados em cada um dos lados do triângulo retângulo ABC.

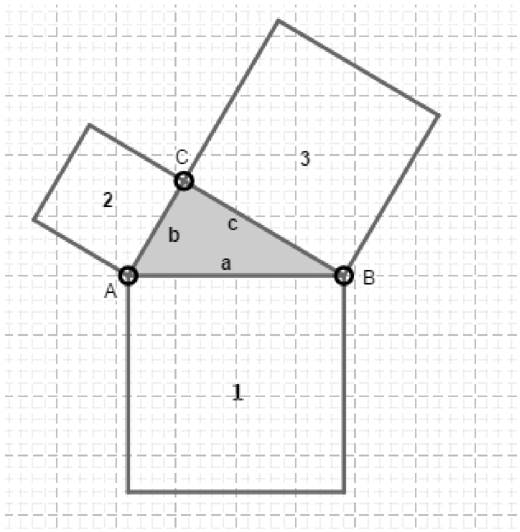

FIGURA 10: Demonstração: Triângulo retângulo ABC Fonte: Elaborado pela autora

Sabendo que área do quadrado é determinada pelo produto dos seus lados e que seus lados são iguais, então é possível afirmar que a área do quadrado também é a medida do lado elevado ao quadrado. Logo a área do quadrado 1 será correspondente ao lado a², a área do quadrado 2 será o lado b² e a área do quadrado 3 será dada pelo lado c².

Observando que o triangulo é reto no vértice C, a hipotenusa se será o lado mais longo do triângulo encontrando-se no lado oposto ao ângulo de 90° (lado a). Pelo Teorema a soma do quadrado dos seus catetos deve ser igual ao quadrado de sua hipotenusa.

Sendo assim, a área ocupada pelos quadrados 2 e 3 somadas devem ser iguais a área do quadrado 1. Para demonstrar isso foram montadas algumas peças que se encaixam perfeitamente dentro dos quadrados 2 e 3.

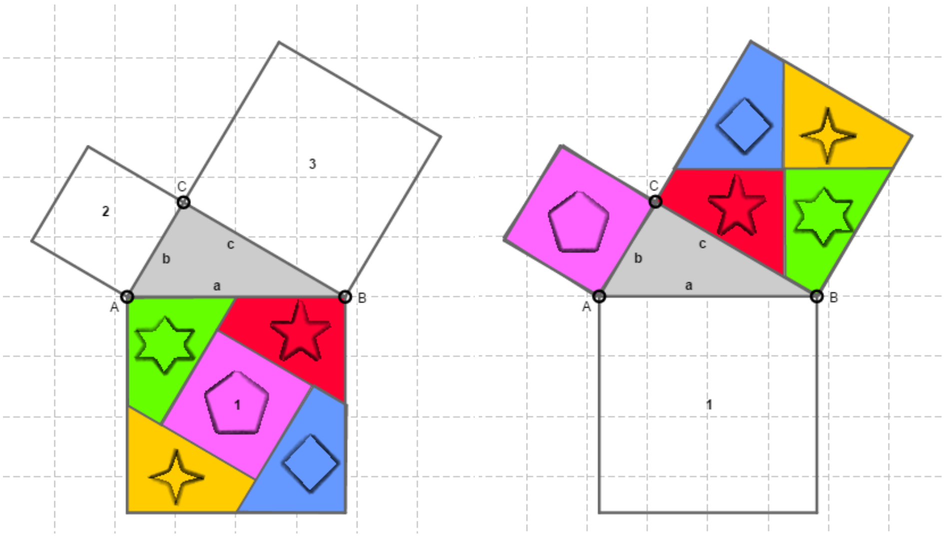

FIGURA 11: Demonstração: Triângulo retângulo ABC   Fonte: Elaborado pela autora

Assim, movimentando as peças, vê-se claramente que somadas as áreas dos quadrados 2 e 3 (b²+c²) obtém-se à área do quadrado 3 (a²). Então, como queríamos demonstrar:

$$\mathbf{a^2=b^2+c^2}$$

Voltando ao exercício inicial, onde se deseja saber a medida do lado EH, precisamos primeiramente da medida dos lados AE (b) que são 3 unidades e AH (c) que são 5 unidades. Analisando a imagem, sabemos que o lado EH corresponde a hipotenusa (a), então teremos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = (3)^2 + (5)^2$$

$$a^2 = 9 + 25$$

$$a^2 = 34$$

$$a = \sqrt{34}$$

Assim chegamos ao valor do lado EH que tem $\sqrt{34}$ unidades de medida.

*5 - NÍVEL 5 DO MODELO DE VAN HIELE (*Rigor)

Dentro deste nível o aluno é capacitado a construir noções de várias questões dentro dos sistemas axiomáticos. Há possibilidade de estudarem as geometrias não euclidianas, neste nível a geometria é vista em um plano abstrato, não necessitando de objetos sólidos para o estudo. Como no nível anterior (4 - dedução formal) foi demonstrado o Teorema de Pitágoras, nesse nível (5 - rigor) os exercícios são propostos relacionados ao mesmo tema.

1. *Um triângulo retângulo tem os catetos medindo 6m e 8m. Encontre a medida da hipotenusa.*

Nessa exercício o aluno pode utilizar do GeoGebra para construir a imagem do triângulo pedido o enunciado.

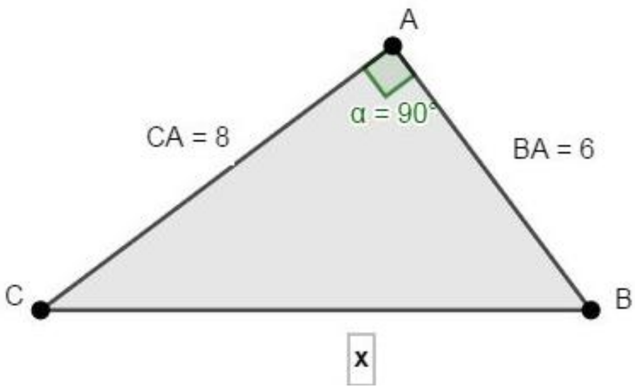

FIGURA 12: Triângulo ABC Fonte: Elaborado pela autora

A atividade pede então as medidas da hipotenusa (x)

$$(a)^2 = (b)^2 + (c)^2$$

$$(x)^2 = (6)^2 + (8)^2$$

$$(x)^2 = 36 + 64$$

$$(x)^2 = 100$$

$$x = \sqrt{100}$$

$$x = 10$$

Logo a hipotenusa mede 10m.

2. *Uma escada de 5m de comprimento está apoiada em uma parede, em um ponto distante 3m do solo. Qual é a distância do pé da escada à parede?*

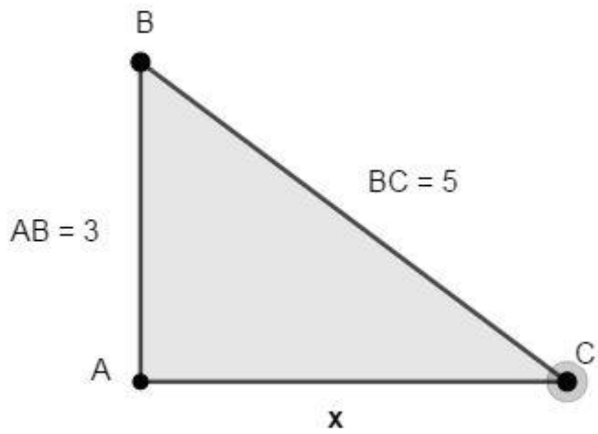

FIGURA 13: Parede 3m e escada 5m Fonte: Elaborado pela autora

Nessa atividade, a hipotenusa já foi dada como o comprimento da escada, enquanto a medida pedida é um dos catetos.

$$(a)^2 = (b)^2 + (c)^2$$

$$(5)^2 = (x)^2 + (3)^2$$

$$25 = x^2 + 9$$

$$x^2 + 9 = 25$$

$$x^2 = 25 - 9$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \sqrt{16}$$

$$x = 4$$

Assim a distância entre o pé da escada e a parede é de 4m.

3. *Sabendo que um dos catetos de um triângulo retângulo se forma a partir da hipotenusa de um outro triângulo cujos catetos medem 6m e 9m e que sua hipotenusa mede 12m, qual o valor do seu outro cateto?*

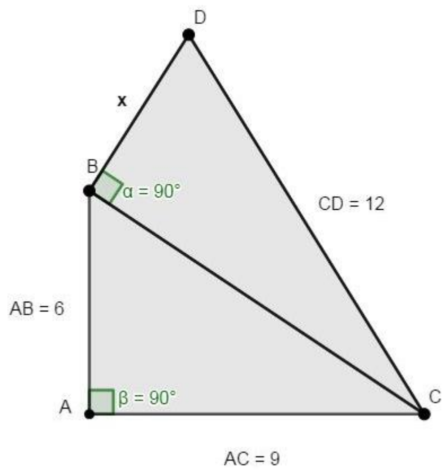

FIGURA 14: Encontrar X no triângulo Fonte: Elaborado pela autora

Para encontrar a medida de x, antes é necessário saber a medida do lado BC do primeiro triângulo que corresponde a um dos catetos do segundo triângulo. Aqui chamaremos de y.

$$(y)^2 = (6)^2 + (9)^2$$

$$(y)^2 = 36 + 81$$

$$y^2 = 117$$

$$y = \sqrt{117}$$

$$y = 3\sqrt{13}\text{m}$$

Somente após descobrir essa medida é possível encontrar a medida do lado BD identificado por x.

$$(12)^2 = (y)^2 + (x)^2$$

$$144 = (\sqrt{117}\ )^2 + x^2$$

$$x^2 +117 = 144$$

$$x^2 = 144 - 117$$

$$x^2 = 27$$

$$x = \sqrt{27}$$

$$x = 3\sqrt{3}\text{m}$$

Para a aprovação desse nível o aluno deve ser capaz de entender enunciados mais longos e detalhados e resolver exercícios sem o auxílio de exemplos. Vale lembrar que nesse nível não haverá exposição de novos conhecimentos, somente a aplicação e execução dos conhecimentos adquiridos nos níveis anteriores. Neste nível o aluno não mais faz deduções simplesmente pela sua aparência, mas sim em virtude de entender a aplicação de suas propriedades.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Depois de realizada a pesquisa, chegasse ao entendimento de que o modelo Van Hiele dá ao professor orientações de como se pode melhorar o ensino da geometria dentro de sala de aula, a partir do conhecimento das fases pelo qual se passam o aprendizado da geometria, favorecendo ao máximo o aproveitamento de cada tópico por parte do aluno.

O modelo coloca o aluno não como um ser passivo, mas sim um ser pensante e ativo na sua própria aprendizagem, fazendo-o participar das aulas para obter autonomia na resolução de problemas por suas próprias experiências.

Conforme pesquisado sobre o modelo Van Hiele, tornou-se mais claro a necessidade de uma nova metodologia dentro de sala de aula. É notória a importância que o modelo dá para a visualização de objetos no estudo dos mesmos. Novas tecnologias vêm como um meio de aprimorar a defasagem nesse nível do ensino. Devemos usar o que a tecnologia e softwares a favor da educação, afim de sempre buscar uma qualidade de ensino melhor.

Em praticamente todos os artigos pesquisados, os autores relatam melhorias na capacidade do ensino-aprendizagem associados ao uso da geometria dinâmica. Ainda são muitos os desafios a serem solucionados. A qualificação de professores nessa área e a instalação de recursos tecnológicos do tipo nas escolas, principalmente nas escolas públicas, ainda é um obstáculo a ser superado. No entanto, quando evidenciado a qualidade do ensino, esses recursos só trazem benefícios ao ambiente escolar. A tecnologia sendo utilizada a favor de uma melhoria da educação e do aprendizado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALVES, G.S; SAMPAIO, F.F. O modelo de desenvolvimento do pensamento do pensamento geométrico de Van Hiele e possíveis contribuições da geometria. Revista de Sistemas de Informação da FSMA n. 5 pp. 69-76 (2010)
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais : matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1997. Brasília: MEC/ Secretaria de Educação Fundamental, 1998.
- COSTA JÚNIOR, J. R. Uma análise do nível de desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos concluintes de um curso de Licenciatura em Matemática: contribuições da teoria de Van Hiele. Anais. 2 Congresso Nacional de Educação, Campina Grande, 2015.
- KALEFF, A. M. et.al. Desenvolvimento do Pensamento Geométrico: o modelo de Van Hiele. Bolema, Rio Claro, n. 10, p. 21-30, 1994.
- NOTARE, M; BASSO, M. Geometria Dinâmica 3D – novas perspectivas para o pensamento espacial. Novas Tecnologias na Educação. v. 14, n. 2 , 2016.
- PIAGET, J.; INHELDER, B. A representação do espaço na criança, segundo Piaget: Os processos mentais que a conduzem à formação da noção do espaço euclidiano. Revista Vydia, v. 32, n. 2, p.21-35, jul./dez., 2012 - Santa Maria, 2012

- SILVA, Luciana; CANDIDO, Cláudia C. Modelo de aprendizagem de geometria do casal van Hiele. Disponível em https://docplayer.com.br/36699466-Modelo-de-aprendizagem-de-geometria-do-casal-van-hiele.html. Acesso em 02/01/2019.
- SILVEIRA, D. T; CÓRDOVA F. P. Métodos de Pesquisa (1. ed., 120p). Porto Alegre: UFRGS Editora. (2009).
- VILLIERS, de M. Algumas reflexões sobre a teoria de van Hiele. Revista Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v. 12, n. 3, p. 400-431, 2010.