FACULDADE PEDRO II

MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA AO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

ROMERO HENRIQUE ABDON SILVA

Belo Horizonte
2009

ROMERO HENRIQUE ABDON SILVA

MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA AO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Monografia apresentada ao curso de graduação em Matemática da Faculdade Pedro II, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Simone Pereira da Silva

Belo Horizonte

2009

À minha família pelo reconhecimento. Aos meus amigos pelos bons momentos que me proporcionaram nesta caminhada. E aos meus alunos, razão do meu esforço.

RESUMO

O presente trabalho aborda a modelagem matemática como estratégia de ensino-aprendizagem e tem como objetivo analisar a utilidade desta estratégia como uma proposta eficaz para favorecer o ensino de Análise Combinatória. Foi realizada uma pesquisa bibliográfica buscando identificar como a modelagem pode ser aplicada ao ensino da disciplina em questão. As informações obtidas estão organizadas neste trabalho da seguinte forma: inicialmente, apresentamos o conceito de modelo, modelagem e modelação matemática; em seguida, expomos sobre o ensino de Análise Combinatória nas escolas e apresentamos os primeiros tópicos que constituem a matéria: o princípio multiplicativo e as permutações simples; e finalmente, apresentamos uma atividade onde se aplica a modelagem matemática ao ensino de Análise Combinatória.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Modelação Matemática, Análise Combinatória

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 5

2 MODELAGEM E MODELOS MATEMÁTICOS 7

3 MODELAÇÃO MATEMÁTICA 9

4 SOBRE O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA 14

5 PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO OU PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM 17

6 PERMUTAÇÕES SIMPLES 19

7 UTILIZANDO A MODELAÇÃO MATEMÁTICA PARA SE CHEGAR À FÓRMULA DOS ARRANJOS SIMPLES 21

7.1 AS PLACAS DE AUTOMÓVEL 21

7.2 INTEIRAÇÃO 24

7.3 MATEMATIZAÇÃO 26

7.4 MODELO MATEMÁTICO 32

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS 33

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 35

1 INTRODUÇÃO

O trabalho que se segue aborda o tema Modelagem Matemática como estratégia de ensino-aprendizagem – pode ser tomada também como método científico de pesquisa – que, segundo Biembengut (2004), nas últimas três décadas vem ganhando "espaço" em diversos países, nas discussões sobre ensino e aprendizagem, com posicionamentos a favor e contra sua utilização como estratégia de ensino.

Entendendo modelagem matemática como "arte de expressar por meio de linguagem matemática situações-problema de nosso meio" (BIEMBENGUT, 2004, p. 11) e baseando-se na proposta curricular de Matemática para a Educação Básica da Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais, que cita a importância do professor ressaltar a relação entre os conceitos abstratos com as suas aplicações concretas do dia-a-dia, percebemos o quanto é útil o trabalho com modelagem.

A modelagem pode ser aplicada ao ensino de diversos conteúdos matemáticos trabalhados no ensino fundamental, médio e superior. Este trabalho tem como objeto de estudo a aplicabilidade da modelagem matemática no ensino de Análise Combinatória para o Ensino Médio.

A Análise Combinatória é uma importante ferramenta que o cidadão necessita para resolver problemas reais. Porém, observa-se que o ensino desta matéria na escola, na maioria das vezes, limita-se ao uso de fórmulas nela contidas para calcular o que está sendo pedido em um determinado problema, sem proporcionar ao aluno a interpretação e entendimento necessários para que aplique em problemas variados do dia-a-dia. E é dentro deste contexto que o uso da modelagem matemática entra como uma ferramenta eficaz para o ensino de Análise Combinatória.

Percebendo a dificuldade dos professores em apresentar os tópicos de Análise Combinatória e a conseqüente dificuldade dos alunos em aprender a matéria, foi formulado o problema de pesquisa: Como a modelagem matemática pode ser aplicada para favorecer o ensino de Análise Combinatória?

Para responder essa questão, é necessário saber o que é um modelo, o que é modelagem matemática e como implementar a modelagem como método de ensino de matemática. Além disso, é preciso analisar como a Análise Combinatória vem sendo trabalhada pelos professores de Matemática e quais são os principais tópicos que constituem a matéria.

Para tanto, foi realizada uma pesquisa bibliográfica com abordagem qualitativa sobre a modelagem matemática e sobre o ensino de Análise Combinatória. Para complementar a pesquisa, apresentamos uma atividade a ser desenvolvida em sala de aula, onde é utilizada a modelagem matemática aplicada ao ensino de Análise Combinatória. A finalidade dessa proposta de atividade é unir a teoria apresentada à prática em sala de aula, servindo como referência para o professor e contribuindo para obter o resultado da pesquisa.

O objetivo deste trabalho é analisar a utilidade da modelagem matemática como uma proposta eficaz para favorecer o ensino de Análise Combinatória e destina-se aos professores que procuram conhecer ou ampliar o conhecimento sobre o tema, em especial àqueles que trabalham com o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio.

2 MODELAGEM E MODELOS MATEMÁTICOS

Segundo Bassanezi (2004, p. 17), a modelagem matemática “consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. E de acordo com este mesmo autor, a modelagem matemática, em seus vários aspectos, “é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la”.

Sobre a relevância do tema, segundo Biembengut, a modelagem matemática

> pode tornar-se caminho para despertar no aluno interesse por assuntos de matemática e, também, de alguma área da ciência que ainda desconheça, ao mesmo tempo em que ele aprende a arte de modelar, matematicamente. Isso porque é dada ao aluno a oportunidade de estudar situações-problemas por meio de pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso investigativo e criativo. (BIEMBENGUT, 2004, p. 23)

Antes de apresentar os procedimentos requeridos no trabalho com modelagem, é preciso entender o conceito de modelo matemático. De acordo com Biembengut (2004, p. 16), um modelo “é um conjunto de símbolos os quais interagem entre si representando alguma coisa. Essa representação pode se dar por meio de desenho ou imagem, projeto, esquema, gráfico, lei matemática, dentre outras formas”. De acordo com o objeto de estudo desta pesquisa, um exemplo de modelo matemático é a fórmula dos arranjos simples:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Para a elaboração de um modelo é preciso seguir um conjunto de procedimentos, que formam o processo chamado de modelagem. Segundo Biembengut,

> Esses procedimentos que perfazem, praticamente, o mesmo percurso da pesquisa científica, podem ser divididos em três etapas, subdivididas em sete sub-etapas, a saber:

> 1ª Etapa: Inteiração
> - reconhecimento da situação-problema → delimitação do problema;
> - familiarização com o assunto a ser modelado → referencial teórico.
> 2ª Etapa: Matematização
> - formulação do problema → hipótese;
> - formulação do modelo matemático → desenvolvimento;
> - resolução do problema a partir do modelo → aplicação.
> 3ª Etapa: Modelo matemático
> -interpretação da solução;
> - validação do modelo → avaliação. (BIEMBENGUT, 2004, p. 17)

Na primeira etapa (inteiração), o aluno fará um estudo tanto indireto (leituras) quanto direto (através da experiência) da situação-problema, procurando reconhecê-la para que se torne clara. Os dados deverão ser registrados aos detalhes para que possam ser bem aproveitados durante o processo de modelagem. A segunda etapa (matematização) desafiará o aluno exigindo dele lógica para deduções, domínio algébrico ou geométrico (dependendo do contexto), para que possa, com rigor matemático, elaborar o modelo, identificando as constantes e variáveis envolvidas e selecionando os símbolos apropriados para essas variáveis. O objetivo é encontrar alguma equação algébrica (como fórmulas) ou algum tipo de representação geométrica (como gráficos) que permita a resolução da situação-problema. Após estar com o modelo em mãos, passa-se para a terceira etapa (Modelo matemático) que consiste na interpretação e validação do modelo através da sua aplicação em diferentes contextos dentro do assunto estudado.

Vale ressaltar que “o processo de modelagem requer do modelador, além do talento para a pesquisa, conhecimento matemático e capacidade de fazer leitura do fenômeno sob ótica matemática”. (BIEMBENGUT, 2004, p. 17)

3 MODELAÇÃO MATEMÁTICA

A modelagem matemática pode ser vista sob dois enfoques: método de pesquisa ou método de ensino. Em sua essência é um método de pesquisa, porém, nas últimas décadas, vem crescendo a sua utilização como metodologia no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Assim, foi denominado como **modelação matemática** o método que se utiliza da essência da modelagem no ensino. Ou seja, é uma adaptação do processo de modelagem, como método de pesquisa, para o ensino.

A modelação matemática pode ser usada em qualquer nível de escolaridade. Segundo Biembengut (2004, p. 30), “objetiva-se, fundamentalmente, proporcionar ao aluno melhor apreensão dos conceitos matemáticos; capacidade para ler, interpretar, formular e resolver situações-problemas e, também, desperta-lhe senso crítico e criativo.”

Para implementar a modelação, o professor atua em duas abordagens: uma que lhe permita desenvolver o conteúdo programático e, ao mesmo tempo, apresentar o processo de modelagem e a outra em que orienta seus alunos a modelar – pesquisar. Nesta primeira abordagem, elabora-se um modelo matemático ou toma-se um modelo pronto e adapta-o para o ensino, isto é, adapta o processo para se elaborar o modelo – modelagem matemática.

> Isso envolve o professor em uma série de etapas:
>
> 1) Inicia a aula com breve explanação sobre o tema aos alunos, instigando-os a levantarem questões e/ou sugestões sobre o assunto abordado que, certamente, abrirão caminhos para atingir as metas propostas.
> 2) Dentre as questões ou sugestões levantadas pelos alunos, seleciona-se uma ou mais que permita desenvolver o conteúdo programático. Se for possível e/ou conveniente, pode-se propor aos alunos que façam pesquisa sobre o assunto, seja por meio de bibliografia ou entrevista a algum especialista.

> 3) Baseados nos dados, o professor e os alunos passam a formular o problema levantando hipóteses, equacionando ou organizando os dados de tal forma a requerer o conteúdo matemático para resolução.
> 4) Neste momento, apresenta-se o conteúdo programático (conceito, definição, propriedades etc.) e procura-se fazer elo com a questão que gerou o processo.
> 5) Em seguida, apresenta-se exemplos análogos, ampliando o leque de aplicações. O estímulo e orientação para o uso da tecnologia (calculadoras e/ou computadores) nesta etapa é importante.
> 6) Uma vez desenvolvido o conteúdo, retorna-se à questão que gerou o processo, formula-se o modelo e resolve-se o problema a partir desse modelo.
> 7) Finalizando essa etapa, é importante que o aluno interprete a solução, e avalie o resultado – validação. Isso permite ao aluno melhor compreensão ou discernimento dos resultados obtidos. (BIEMBENGUT, 2004, p. 30)

Essas sete etapas não precisam ser cumpridas em uma única aula. O professor pode planejar de modo que sejam cumpridas em diversas aulas dentro de um período letivo: as duas primeiras etapas em uma aula; a pesquisa sobre o assunto pode ser tarefa extra-casse; as três etapas seguintes em uma segunda aula; e as duas últimas no momento em que o professor perceber que os alunos já aprenderam bem o conteúdo proposto.

A segunda abordagem é feita paralelamente ao desenvolvimento do conteúdo programático. Para facilitar a condução, o professor pode propor que os alunos formem grupos de acordo com seus interesses e afinidades. É importante que no planejamento sejam estabelecidos pelo menos cinco momentos em sala de aula para efetuar as devidas orientações.

> O objetivo central deste trabalho é criar condições para que os alunos aprendam a fazer pesquisa – atividade pouco comum, apesar de fazer parte do currículo; passem a atuar/fazer e não apenas receber pronto sem compreender o significado do que estão estudando; promover conhecimento, criatividade e senso crítico, principalmente na formulação e validação do modelo; inteirar-se dos trabalhos dos demais grupos, no seminário e, dentre outras coisas, aplicar as normas da metodologia

> científica, ao elaborar uma exposição escrita do trabalho. (BIEMBENGUT, 2004, p. 31)

O professor que queira utilizar-se da modelação, mas não se sente preparado, pode começar por aprender a partir de alguns modelos matemáticos clássicos ou trabalhos de modelagem matemática realizados no ensino. Deve escolher um trabalho de modelagem ou um modelo matemático pronto para estudá-lo. Esse trabalho ou modelo escolhido servirá de guia e permitirá que o professor tome conhecimento da modelagem matemática: tema, conceitos, dados, formulação. Segundo Biembengut (2004, p.33), para aprender como se constitui um modelo matemático, "é preciso escolher um de fácil compreensão, relevado interesse e que atenda às condições quanto ao conteúdo matemático do programa curricular". E de acordo com esta mesma autora:

> Nem sempre o modelo matemático ou trabalho de modelagem é apresentado em detalhes relativos aos procedimentos e conteúdos matemáticos que foram utilizados. Isso exigirá que o professor faça:
> - leitura atenta dos dados sobre o tema do modelo;
> - análise cuidadosa sobre a(s) fórmula(s) matemática(s) contida(s) no texto;
> - levantamento de quais teorias não-matemáticas fazem parte do modelo;
> - levantamento de quais teorias são pré-requisitos;
> - estudo sobre o assunto ou a teoria que for pré-requisito, se for necessário. (BIEMBENGUT, 2004, p. 33)

Passando da aprendizagem do professor para a sua prática em sala de aula (momento de implementar a modelação matemática), a questão passa a ser traduzir o modelo de forma didática, permitindo desenvolver o conteúdo programático e, ao mesmo tempo, proporcionando ao aluno inteirar-se com o tema de outra área do conhecimento.

O sucesso do trabalho depende do planejamento, que permite antecipar condições e situações, além de proporcionar meios para atingir ao máximo os objetivos.

Biembengut (2004) sugere que o professor estabeleça os objetivos que espera atingir; elabore texto de fácil compreensão sobre o modelo, com as idéias e os conceitos essenciais, para ser apresentado aos alunos; elabore uma ou mais questões cuja formulação e resolução de cada uma leve ao conteúdo matemático que quer ensinar; avalie o tempo para essa abordagem e para o ensino do conteúdo; procure organizar a formulação do problema de forma a levar ao conteúdo programático e, ao mesmo tempo, justificar a necessidade e importância deste; determine o momento para desenvolver o conteúdo programático; elabore exemplos análogos, propiciando maior número de aplicações do conteúdo e, também, de informações que contribuam para a produção de conhecimentos; planeje atividades em que os alunos possam apresentar exemplos aplicados a outras áreas do conhecimento; preveja o momento de retornar a questão inicial e concluir o modelo; e planeje como orientar os alunos para elaborarem o trabalho de modelagem, seja na formação de grupos, organização e seleções das questões, utilização de materiais seja na fomentação de discussões sobre o tema. Diretrizes, formas de atuação e recursos audiovisuais são algumas variáveis que atuam como forças propulsoras.

É importante destacar também as vantagens e dificuldades do trabalho com modelagem matemática no ensino. Segundo Bassanezi, no processo evolutivo da Educação Matemática,

> a inclusão de aspectos de aplicações e mais recentemente, resolução de problemas e modelagem, têm sido defendida por várias pessoas envolvidas no ensino de matemática. Isto significa, entre outras coisas, que a matéria deve ser ensinada de um modo significativo matematicamente, considerando as próprias realidades do sistema educacional. (BASSANEZI, 2004, p. 36)

De acordo com isto, destacam-se algumas vantagens: a modelagem matemática desenvolve nos estudantes capacidades e atitudes que os tornam explorativos, criativos e habilidosos na resolução de problemas; os prepara para a vida real como cidadãos atuantes na sociedade, competentes para ver e formar juízos próprios, reconhecer e entender exemplos representativos de aplicações de conceitos matemáticos; os prepara também para utilizar a matemática como ferramenta para resolver problemas em diferentes situações e áreas; fornece ao estudante um rico arsenal para entender e interpretar a própria matemática em todas as suas facetas;

e facilita ao estudante compreender melhor os argumentos matemáticos, guardar os conceitos e os resultados, e valorizar a própria matemática.

As dificuldades podem ser tanto instrucionais, quanto para estudantes e professores. Os cursos regulares possuem um programa que deve ser desenvolvido completamente. A modelagem pode ser um processo muito demorado não dando tempo para cumprir o programa todo. Por outro lado, alguns professores têm dúvida se as aplicações e conexões com outras áreas fazem parte do ensino de Matemática, salientando que tais componentes tendem a distorcer a estética, a beleza e a universalidade da Matemática. O uso da Modelagem foge da rotina do ensino tradicional e os estudantes, não acostumados com o processo, podem se perder e se tornar apáticos nas aulas. Muitos professores não se sentem habilitados a desenvolver modelagem em seus cursos, por falta de conhecimento do processo ou por medo de se encontrarem em situações embaraçosas quanto às aplicações de matemática em áreas que desconhecem.

> A modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido mas, caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado. Com a modelagem o processo de ensino-aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno com seu ambiente natural. (BASSANEZI, 2004, p. 38)

4 SOBRE O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Ultimamente, a sociedade exige cada vez mais que o cidadão desenvolva habilidades que possibilitem a resolução de problemas do dia-a-dia com mais velocidade e de um modo eficaz, seja no trabalho ou em outros ambientes. Com isso, as matrizes curriculares apresentadas pelas escolas de ensino fundamental e médio vêm se adequando a essa realidade na tentativa de possibilitar ao cidadão uma educação voltada para as exigências do dia-a-dia.

Um dos conteúdos trabalhados durante o ensino médio é a Análise Combinatória, que possui uma variedade de aplicações em problemas reais. Como exemplo, tem-se a seguinte situação-problema: *Usando as 26 letras e os 10 algarismos conhecidos, quantas placas diferentes de automóvel podem ser feitas de modo que, em cada uma, existam três letras (não repetidas) seguidas de quatro algarismos (repetidos ou não)?* Segundo Dante (2005), problemas como este envolvem o cálculo do número de agrupamentos que podem ser feitos com os elementos de um ou mais conjuntos, submetidos a certas condições, e são resolvidos por meio dos assuntos que constituem a Análise Combinatória.

Porém, percebe-se certa dificuldade tanto do professor em ensinar, quanto do aluno em aprender e aplicar os tópicos que compõe a Análise Combinatória. Segundo Schliemann (citado por Pinheiro, 2007, p. 1), ao realizar observações não sistemáticas de aulas sobre análise combinatória, verificou que o ensino escolar limita-se quase sempre ao treinamento no uso de fórmulas e algoritmos para encontrar o número de arranjo, combinações ou permutações sem proporcionar que os alunos derivem as referidas fórmulas pelo uso da manipulação dos elementos. Ou seja, o professor apresenta as fórmulas e os alunos decoram sem saber ao certo em quais problemas irão usar cada uma. E a preocupação com que fórmula usar limita o aluno, no sentido de não possibilitar que este procure compreender os textos dos problemas.

Como observou Sabo (2007), muitos professores de matemática, por diversas razões, evitam, ou até não abordam, de forma consistente, o tema: Análise

Combinatória. Muitos alegam ser difícil ensinar, outros, que os alunos não têm capacidade de aprender algo tão sofisticado, alguns afirmam que o tempo (ano letivo) é insuficiente e então torna necessário optar por alguns temas que julgam mais importantes.

> Algumas vezes, observo professores afirmando que eles próprios não têm esses conceitos construídos de forma sólida e significativa, e, por esse motivo, evitam abordar o tema ou, optam, apenas, a apresentar aos alunos um processo de aplicação de fórmulas prontas, sem justificativas ou explicações. Assim sendo, o aluno necessita utilizar-se da memorização para aplicar a fórmula certa na resolução de problemas específicos, ou seja, o ensino de Análise Combinatória torna-se tecnicista e operacional.
> Acredito que, neste contexto, o aluno sente a necessidade de adivinhar a fórmula pertinente para encontrar a resposta do problema. Essa atitude pode favorecer o não desenvolvimento do raciocínio combinatório como também, a não construção dos conceitos desse tema. (SABO, 2007, p. 8)

Um dos tópicos que constituem a Análise Combinatória é o Princípio Multiplicativo, apresentado pela primeira vez no 5° ou 6° ano do ensino fundamental e que introduz a matéria no ensino médio. É importante que este tópico fique muito claro para os alunos, pois é essencial para a compreensão de outros temas subseqüentes da análise combinatória. Para a construção do princípio multiplicativo, é importante que o aluno saiba listar as primeiras possibilidades de agrupamento dos dados, daí a importância do uso da árvore de possibilidades, que assegura a correta contagem ou uso do princípio multiplicativo.

Ficando claro o princípio multiplicativo, acredita-se que os alunos estarão preparados para aprender os tópicos que dão seqüência à matéria e estarão aptos a usar de modo correto as fórmulas apresentadas durantes estes tópicos, pois, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (2000, p. 126-127):

> A Contagem, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser

> aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. As fórmulas devem ser conseqüência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande.

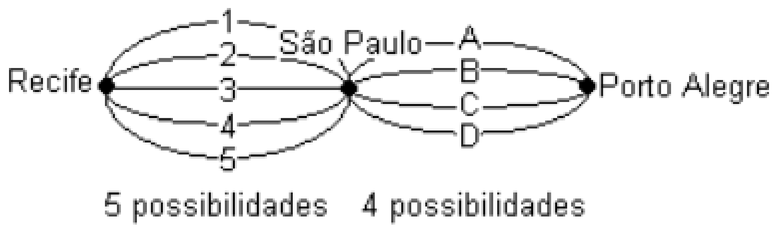
Ao utilizar a modelagem como método no ensino de análise combinatória, é de fundamental importância que o professor, ao iniciar o processo, trabalhe com o princípio multiplicativo deixando-o claro para os alunos. Pois, supondo que o modelo ao qual se quer chegar seja a fórmula dos arranjos simples, a formulação deste dependerá deste princípio fundamental.

5 PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO OU PRINCÍPIO FUDAMENTAL DA CONTAGEM

A multiplicação é a base de um raciocínio muito importante em Matemática, chamado princípio multiplicativo. O princípio multiplicativo constitui a ferramenta básica para resolver problemas de contagem sem que seja necessário enumerar seus elementos. Acompanharemos a resolução de alguns problemas.

1º) Uma pessoa quer viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo que há 5 roteiros diferentes para chegar a São Paulo partindo de Recife e 4 roteiros diferentes para chegar a Porto Alegre partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderá viajar de Recife a Porto Alegre?

Para facilitar a compreensão vamos utilizar o seguinte esquema:



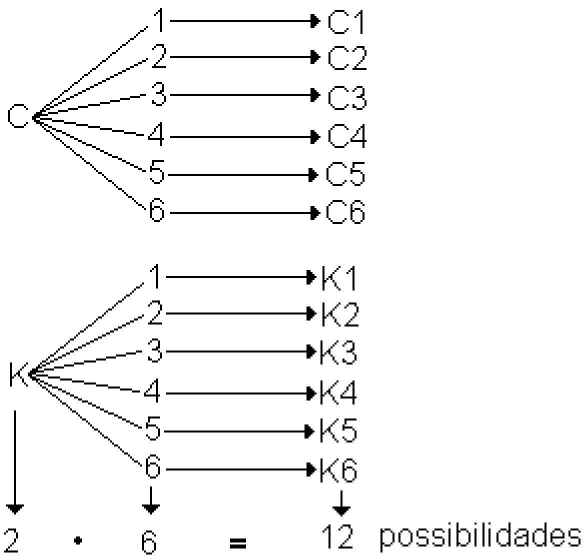
Total de possibilidades: $5 \cdot 4 = 20$. São elas:

1A	1B	1C	1D
2A	2B	2C	2D
3A	3B	3C	3D
4A	4B	4C	4D
5A	5B	5C	5D

Portanto, nas condições do problema, há 20 maneiras possíveis de viajar de Recife a Porto Alegre, passando por São Paulo.

2º) Ao lançarmos uma moeda e um dado, quantos são os resultados possíveis?

Temos as possibilidades indicadas para o resultado (sendo **C**: cara e **K**: coroa).



Observemos que o evento tem duas etapas, com 2 possibilidades em uma e 6 possibilidades em outra, totalizando 2 · 6 = 12 possibilidades.

De um modo geral, temos:

> Se um evento é composto por duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na primeira etapa é **m** e o número de possibilidades na segunda etapa é **n**, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto **mn**. (DANTE, 2005, p. 272)

Esse princípio pode ser generalizado para ações constituídas de mais de duas etapas sucessivas.

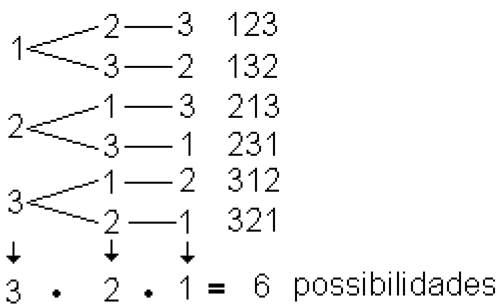
6 PERMUTAÇÕES SIMPLES

Permutar é sinônimo de trocar. Intuitivamente, nos problemas de contagem, devemos associar a permutação à noção de misturar.

Vejamos quantos agrupamentos é possível formar quando temos **n** elementos e todos serão usados em cada agrupamento. Observemos os problemas:

1º) Quantos números de 3 algarismos (sem repeti-los num mesmo número) podemos formar com os algarismos 1, 2 e 3?

Podemos fazer uma árvore de possibilidades:



Pelo princípio fundamental da contagem temos $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ números.

Vemos que a ordem dos algarismos tem fundamental importância, pois todos os números diferem entre si pela ordem de seus algarismos.

2º) Quantos são os anagramas (diferentes disposições das letras de uma palavra) da palavra ANEL?

$$\underline{\quad 4 \quad} \cdot \underline{\quad 3 \quad} \cdot \underline{\quad 2 \quad} \cdot \underline{\quad 1 \quad} = 24 \text{ possibilidades}$$

Há 4 possibilidades para a primeira posição, 3 possibilidades para a segunda, 2 possibilidades para a terceira e 1 possibilidade para a quarta posição.

Pelo princípio fundamental da contagem temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ anagramas.

De modo geral:

> Se temos **n** elementos distintos, então o números de agrupamentos ordenados que podemos obter com todos esses **n** elementos é dado por:
>
> $$n(n - 1)(n - 2) \bullet ... \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = \mathbf{n!}$$
>
> Esses agrupamentos ordenados (diferem pela ordem) recebem o nome de *permutações simples*. Indicamos por $\mathbf{P_n}$ o número de permutações simples de **n** elementos:
>
> $$\mathbf{P_n = n!}$$
>
> (DANTE, 2005, p. 273)

7 UTILIZANDO A MODELAÇÃO MATEMÁTICA PARA SE CHEGAR À FÓRMULA DOS ARRANJOS SIMPLES

Será apresentada uma atividade a ser desenvolvida em sala de aula, onde se usa a modelagem matemática como estratégia de ensino (modelação matemática) da Análise Combinatória. O trabalho terá como tema “As placas de automóvel” e o problema a ser formulado levará ao desenvolvimento do modelo matemático: a fórmula dos arranjos simples.

Iniciaremos apresentando um breve histórico sobre o tema, que servirá de referência para o professor, e daremos seqüência expondo os procedimentos para o desenvolvimento do trabalho.

7.1 AS PLACAS DE AUTOMÓVEL

Origem: Wikipédia

As placas de automóvel no Brasil são emitidas pelos departamentos de trânsito (DETRAN) de cada estado, seguindo uma seqüência única para todo país.

O sistema atual é o RENAVAM (Registro Nacional de Veículos Automotores). Foi criado através do decreto-lei nº 237 de 23 de fevereiro de 1967, estabelecido de maneira gradativa e teve a primeira implantação efetiva ocorrida em 1990 no estado do Paraná.

O primeiro sistema foi utilizado de 1901, quando os primeiros veículos a motor começaram a ser emplacados, até 1941. No início, o trânsito era assunto de competência municipal. Cada município expedia as suas placas, que eram iguais em todo o território nacional. Eram pretas com letras brancas, tinham uma letra (P: particular; A: aluguel) e uma quantidade de números que variava de 1 a 5 dígitos. Exemplos: P 6, A 25, A 587, P 1·349, P 12·879

O segundo sistema (sistema numérico) foi usado entre 1941 e 1969. Ele introduziu as cores: veículos de transporte pago (placas vermelhas com letras brancas), oficiais (placas brancas com letras pretas) e particulares (placas laranjas com letras pretas). Nesse sistema, o nome dos municípios vinha antes da sigla dos estados. As combinações eram numéricas, agrupadas duas a duas: a mais comum era do tipo 12·34·56; entretanto, em estados com menos automóveis (ou para propósitos especiais), havia também as combinações 1·23, 12·34 e 1·23·45. No estado de São Paulo, chegou a haver a combinação 1·23·45·67. As placas de motocicletas eram ovais, possuíam apenas a sigla do estado (como era comum nas placas traseiras de outros veículos) e embaixo tinham o ano da expedição.

O terceiro sistema (sistema alfanumérico – duas letras e quatro números) foi usado entre 1969 e 1990 (em alguns estados, estendeu-se até 1999). Neste sistema, cada estado possuía uma seqüência que poderia repetir-se em todos os estados. Os prefixos eram vinculados aos municípios, exigindo a troca da placa toda vez que o veículo fosse vendido para alguém residente em outro município. A sigla do estado passou a vir antes do nome do município. Nesta época, a mudança de cor resumiu-se à troca do laranja, nas placas particulares, pelo amarelo. As demais placas permaneceram com suas cores do sistema anterior. Os principais problemas deste sistema eram os seguintes:

- Quando os sistemas de bancos de dados computadorizados começaram a ser implantados, surgiram incompatibilidades, visto que: a placa AB·0123 poderia existir em cada um dos estados; as motocicletas usavam uma seqüência paralela com apenas três números. A placa AB·123 (motocicleta) seria confundida pelos computadores com a placa AB·0123.
- O número máximo de prefixos disponíveis por estado era de apenas 676 combinações (26 X 26), não havendo disponibilidade de prefixos para todos os municípios, uma vez que, em alguns estados, o número de municípios é quase o mesmo de prefixos ou até maior, além do fato de que os municípios mais populosos chegavam a ter dezenas de prefixos. O estado de Minas Gerais na época tinha 722 municípios.

As limitações técnicas do sistema com duas letras e quatro números levaram à implantação, a partir de 1990, de um novo sistema de identificação das placas, com o acréscimo de mais uma letra. Dentre as outras modificações, houve a mudança da cor das placas particulares de amarelo para cinza.

Escolheu-se a forma "ABC·1234" com um hífen ou ponto entre as letras e os números. Acima da combinação há uma tarjeta metálica com a Unidade da Federação (RS = Rio Grande do Sul, SC = Santa Catarina etc.) e o nome do município onde o veículo está registrado. A tarjeta pode ser trocada quebrando o lacre (feito de plástico ou chumbo).

O simples acréscimo de mais uma letra nas placas possibilitou a criação de um cadastro nacional unificado de veículos. A combinação alfanumérica dada a um veículo não pode ser transferida a outro, ser substituída, nem é permitido o reaproveitamento da combinação por outro veículo, mesmo após o sucateamento.

7.2 INTEIRAÇÃO

Esta é a primeira etapa do processo de modelagem. É nela que o aluno se familiarizará com o assunto a ser apresentado pelo professor, que iniciará a aula com breve explicação sobre o tema: **As placas de automóvel**.

É neste momento que o professor levantará algumas questões do tipo:

- Quais são as características das placas de automóvel?
- Será que existe mais de um veículo com a mesma placa em todo Brasil?
- Uma pessoa pode trocar a placa de seu veículo?
- As placas de automóvel sempre tiveram a mesma estrutura?

Os alunos apresentarão as suas hipóteses e novas questões podem ser levantadas por eles a partir daí. É nesta hora que o professor irá propor uma pesquisa sobre o assunto. A turma será dividida em grupos com no máximo quatro alunos cada. A primeira parte desta pesquisa consistirá na observação das placas dos automóveis nas ruas e na anotação de todos os dados das placas.

Tudo isto deve ser planejado para ser discutido em uma primeira aula. Numa segunda aula, o professor pedirá que os alunos apresentem os dados obtidos com a primeira parte da pesquisa. A utilização do quadro será necessária para o professor registrar os exemplos das placas que os grupos trouxeram. É importante que registre exemplos de todos os grupos.

Assim, será possível responder a algumas questões levantadas sobre as características e estruturas das placas: a disposição das letras e números; cores; etc.

Ainda na segunda aula, após este primeiro momento, o professor apresenta a segunda parte da pesquisa, que consiste na leitura de um primeiro texto (dado pelo professor) abordando um breve histórico sobre o assunto.

Com este texto, o aluno deverá ser capaz de responder aos outros questionamentos levantados, como a possibilidade ou não de haver mais de um veículo com a mesma placa em todo Brasil; se uma pessoa pode trocar a placa de seu automóvel; se as placas sempre tiveram a mesma estrutura; etc.

Nesta segunda aula, o aluno deverá obter as seguintes respostas:

- As placas atuais possuem três letras das 26 do nosso alfabeto, seguidas de quatro algarismos dos 10 conhecidos (0,1,2,3,4,5,6,7,8 e 9). Acima desta combinação há a sigla do estado seguida do nome do município onde o veículo está registrado. A cor de cada placa está de acordo com o tipo de uso do veículo.

- A combinação alfanumérica dada a um veículo não pode ser transferida a outro, ser substituída, nem é permitido o reaproveitamento da combinação por outro veículo, mesmo após o sucateamento. Ou seja, não é possível existir mais de um veículo com a mesma placa em todo o Brasil e a placa de veículo não pode ser trocada.

- A estrutura das placas mudou de acordo com a necessidade de registro dos automóveis e quantidade suficiente de prefixos para atender a todos os estados.

7.3 MATEMATIZAÇÃO

Nesta segunda etapa do trabalho, a ser planejada para uma terceira aula, o professor formulará o problema. Os alunos, baseados em uma análise criteriosa da situação problema, classificarão as informações relevantes, formularão as hipóteses, identificarão as variáveis envolvidas, selecionarão os símbolos apropriados e descreverão as relações em termos matemáticos, elaborando o modelo.

Claro que o professor estará, a todo o momento, mediando o processo.

> O objetivo principal dessa etapa do processo de modelagem é chegar a um conjunto de expressões aritméticas, fórmulas, equações algébricas, gráficos, representações ou programa computacional que leve à solução ou permita a dedução da solução. Uma vez modelada, resolve-se a situação-problema a partir do modelo e realiza-se a aplicação. (BIEMBENGUT, 2004, p.18)

A situação problema é a seguinte: Usando as 26 letras e os 10 algarismos conhecidos, quantas placas diferentes de automóvel podem ser feitas de modo que, em cada uma, existam três letras (não repetidas) seguidas de quatro algarismos (repetidos ou não)?

Este problema limita-se a um tipo específico de placa: as que possuem as três letras distintas. É importante ressaltar que as placas emitidas pelo DETRAN podem possuir letras repetidas. Logo a quantidade de placas procurada é menor do que o total de placas que podem ser emitidas pelo DETRAN.

A princípio, o professor pode pedir aos grupos que calculem o número total de placas que podem ser emitidas pelo DETRAN, levando-se em conta que não pode haver placas com todos os algarismos nulos.

Primeiramente, podem determinar de quantas formas podemos dispor as letras. Como sabemos que o alfabeto possui 26 letras e é permitida a repetição, há 26 maneiras para a escolha da primeira letra, 26 para a segunda e 26 para a terceira. Portanto, existem, pelo princípio fundamental da contagem:

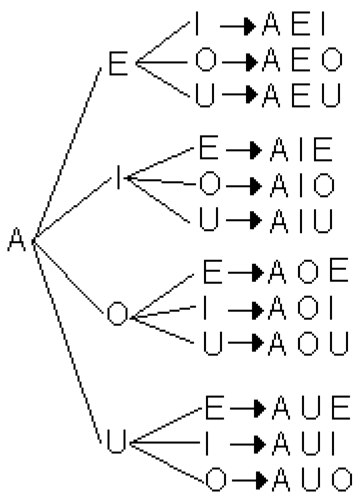
$\overline{26} \cdot \overline{26} \cdot \overline{26}$ = **17.576** possibilidades

Considerando que não pode haver placas com todos os algarismos nulos, os números vão variar de 0001 a 9999. Logo existem 9.999 formas de dispor os algarismos. Utilizando o princípio multiplicativo novamente: para cada uma das 17.576 possibilidades de dispor as letras, temos 9999 formas de dispor os algarismos. Logo, o número total de placas que podem ser emitidas pelo DETRAN é:

17.576 · 9.999 = **175.742.424**

Retornamos ao problema, que pode ser resolvido de modo análogo. Porém, o professor induzirá os alunos a seguirem alguns passos, necessários para a elaboração do modelo. É importante ressaltar que para os alunos, até o momento, o objetivo é apenas calcular o número de placas pedido. A proposta de elaborar um modelo será apresentada posteriormente.

O professor deve sugerir aos alunos que construam uma árvore de possibilidades que mostre algumas opções da disposição das letras. Por exemplo, utilizando somente as vogais: A, E, I, O, U.



Acima estão listadas as possíveis seqüências de três letras distintas, formadas por vogais e começadas com a letra A.

Algumas seqüências listadas, com o uso da árvore de possibilidades, levam o aluno a perceber se fará a correta contagem das possibilidades de acordo com o problema. Além de observar que todas as seqüências possuem letras distintas, como foi pedido no problema, o aluno observa também que a ordem das letras muda a seqüência. Por exemplo, as placas AEI-1234 e AIE-1234 são diferentes.

Interpretado o problema, o professor distribuirá as letras do alfabeto entre os grupos e pedirá que cada grupo calcule o número de seqüências que podem ser formadas com as letras dadas. Supondo que foram formados oito grupos, temos a seguinte distribuição:

Grupos	1 e 2	3 e 4	5 e 6	7 e 8
Letras	A B C D E	F G H I J K	L M N O P Q R	S T U V W X Y Z
Nº de letras	5	6	7	8

Pelo princípio multiplicativo, teremos os seguintes resultados:

Grupos	1 e 2	3 e 4	5 e 6	7 e 8
Letras	A B C D E	F G H I J K	L M N O P Q R	S T U V W X Y Z
Resultado	$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$	$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$	$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$	$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

Em cada caso, foi calculada a quantidade de seqüências possíveis formadas por três letras distintas dentre as letras dadas. Em linguagem matemática, dizemos nesse caso que fizemos arranjos das letras dadas tomadas 3 a 3.

Por exemplo, no caso dos grupos 1 e 2, dizemos que fizemos arranjos das 5 letras tomadas 3 a 3. E o número desses arranjos é 60. Indicamos assim: $A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Nos problemas de contagem, o conceito de arranjo está diretamente associado à noção de escolher seqüências:

- **A B C** é uma seqüência, sendo **A** o 1° elemento, **B** o 2° elemento e **C** o 3° elemento desta seqüência.

- **A C B** é outra seqüência, diferente da anterior, sendo **A** o 1° elemento, **C** o 2° elemento e **B** o 3° elemento.

Percebemos então que, mudando a ordem dos elementos, mudamos a seqüência.

Após o professor apresentar as primeiras idéias sobre arranjos, levará os alunos a perceberem que para calcular o número de arranjos em qualquer caso, deverão levar em consideração duas variáveis: a quantidade total de elementos dados e a quantidade de elementos que cada seqüência terá.

Por exemplo, os grupos 3 e 4 receberam as letras F, G, H, I, J e K e determinaram quantas seqüências de três letras distintas podem ser formadas com elas. Para isso, utilizaram o princípio multiplicativo: $\mathbf{6 \cdot 5 \cdot 4}$. Nesta multiplicação, reparamos que o número de fatores corresponde ao número de letras (elementos) de cada seqüência e o primeiro fator corresponde ao número total de letras (elementos) dadas.

Após identificar quais são as variáveis envolvidas para o cálculo do número de arranjos em qualquer caso, os alunos estarão preparados para tentar encontrar uma expressão que permita fazer este cálculo para um caso geral.

Com isso, o professor pode fazer o seguinte questionamento: Como calcular o número total de arranjos, no caso geral de **n** elementos, tomados **p** a **p**, com $n \geq p$, ou seja, como calcular $A_{n,p}$?

O objetivo aqui, que deve ficar claro para os alunos, é encontrar uma fórmula que permite calcular o número total de arranjos neste caso geral.

É provável que os alunos apresentem dificuldades para progredir nesta etapa, porém o professor como mediador do processo conduzirá os alunos no desenvolvimento do modelo.

Para calcular o número de seqüências formadas pelas letras, os alunos usaram o princípio multiplicativo:

Grupos	1 e 2	3 e 4	5 e 6	7 e 8
Letras	A B C D E	F G H I J K	L M N O P Q R	S T U V W X Y Z
Operação	$5 \cdot 4 \cdot 3$	$6 \cdot 5 \cdot 4$	$7 \cdot 6 \cdot 5$	$8 \cdot 7 \cdot 6$

Como o objetivo é encontrar uma expressão onde apareçam as duas variáveis citadas (quantidade total de letras dadas e quantidade de letras de cada seqüência) faremos uma série de operações.

Multiplicando e dividindo cada expressão pelo fatorial do antecessor do último fator, não alteramos os resultados:

Grupos	1 e 2	3 e 4	5 e 6	7 e 8
Letras	A B C D E	F G H I J K	L M N O P Q R	S T U V W X Y Z
Operação	$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!}$	$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!}$	$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!}$	$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!}$

Cada expressão obtida pode ser escrita por meio de fatoriais:

Operação	$\frac{5!}{2!}$	$\frac{6!}{3!}$	$\frac{7!}{4!}$	$\frac{8!}{5!}$

Os números 5, 6, 7 e 8 que aparecem nos numeradores correspondem ao número de letras dadas a cada grupo, ou seja, uma das variáveis está definida na expressão.

Reparando ainda mais, percebemos que é possível fixar no denominador a diferença entre a quantidade total de letras dadas e a quantidade de letras de cada seqüência.

Operação	$\frac{5!}{(5-3)!}$	$\frac{6!}{(6-3)!}$	$\frac{7!}{(7-3)!}$	$\frac{8!}{(8-3)!}$

Este padrão nos permite generalizar e escrever a expressão da seguinte forma:

$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$, onde $A_{n,p}$ representa o número total de arranjos de **n** elementos tomados **p** a **p** ($p \leq n$).

Esta expressão, ou fórmula, é o nosso modelo procurado e permitirá a resolução do problema que gerou o processo. Ou seja, formulado o modelo, o professor deve propor aos alunos que retornem ao problema e o resolvam a partir desse modelo.

Primeiramente, vamos determinar o número de seqüências de três letras distintas formadas com as 26 letras do alfabeto. Ou seja, vamos calcular o número de arranjos de 26 elementos tomados 3 a 3.

Utilizando a fórmula $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$, temos: $A_{26,3} = \frac{26!}{(26-3)!} = 15.600$

Logo, o número de seqüências de letras é 15.600.

De acordo com o problema, os algarismos podem ser repetidos ou não. Sabemos também que não pode haver placas com os algarismos nulos. Isto não foi citado no problema, porém levaremos em consideração. Logo os números vão variar de 0001 a 9999, existindo 9.999 seqüências de números.

Para cada 15.600 seqüências de letras, existirão 9.999 seqüências de números. Aplicando o princípio multiplicativo novamente, concluímos que a quantidade de placas pedida é:

15.600 · 9.999 = **155.984.400**

Resolvido o problema, o professor pode apresentar a definição formal de Arranjo Simples.

É importante deixar claro para os alunos que o problema poderia ser resolvido utilizando somente o princípio fundamental da contagem, porém existem outros problemas onde a utilização da fórmula será necessária para resolvê-los.

7.4 MODELO MATEMÁTICO

Nesta terceira etapa do processo é feita a validação do modelo; o aluno utiliza o modelo em outros problemas onde é aplicado. Exemplos:

- Um clube tem 30 membros. A diretoria é formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Se uma pessoa pode ocupar apenas um desses cargos, de quantas maneiras é possível formar uma diretoria?

- De quantas maneiras podemos escolher um pivô e um ala num grupo de 12 jogadores de basquete?

- Dispomos de 5 cores e queremos pintar uma faixa decorativa com 3 listras, cada uma de uma cor. De quantas maneiras isso pode ser feito?

- Numa competição com 10 países, de quantas maneiras podem ser distribuídas as medalhas de ouro, prata e bronze?

A validação do modelo permite ao aluno melhor compreensão ou discernimento dos resultados obtidos. Ao verificar que o modelo atendeu às necessidades que o geraram, procura-se descrever, deduzir ou verificar outros resultados. Ou seja, ao fim desta etapa, o professor pode apresentar as primeiras idéias sobre as combinações simples, mostrar a diferença entre arranjos e combinações e levar os alunos a deduzir a fórmula das combinações simples, prosseguindo assim com o conteúdo programático.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A modelagem matemática como estratégia de ensino-aprendizagem (modelação matemática) vem sendo implementada há pouco mais de uma década. O trabalho com modelagem possibilita ao aluno melhor entendimento do conteúdo proposto, despertando o seu interesse pela matemática. Isso acontece devido à aproximação do conteúdo com a realidade. Outra característica importante é que o aluno passa a atuar buscando as informações e não as recebendo prontas, compreendendo assim o significado do que está estudando.

Porém, existem também os obstáculos; além da falta de orientação por parte dos professores, há também a falta de experiência dos alunos com este tipo de trabalho. O primeiro passo que o professor que não se sente preparado deve dar é estudar sobre o assunto. O segundo passo é planejar, pois o planejamento é fundamental; é preciso determinar com antecedência as estratégias que serão utilizadas.

No caso específico de se aplicar a modelagem matemática ao ensino de Análise Combinatória, deve-se também levar em consideração outros fatores, como o domínio, por parte do professor, dos principais tópicos que constituem a matéria: o princípio multiplicativo, as permutações, etc. Além disso, o professor deve reconhecer que a forma mais comum de se ensinar Análise Combinatória – o professor apresenta a fórmula primeiro e em seguida os problemas – gera certa dificuldade na interpretação e resolução de problemas variados.

O professor que queira trabalhar com modelagem matemática deve ser criativo, pois a criatividade é fundamental na escolha do tema, pois é dele que se extrai o conteúdo programático. A criatividade é fundamental também na adaptação do processo de modelagem para o ensino, ou seja, no desenvolvimento da modelação matemática. Vale ressaltar que a atividade que apresentamos neste trabalho é uma adaptação do processo de modelagem para o ensino de Análise Combinatória, cujo tema permitiu extrair o conteúdo desejado: os arranjos simples.

Considerando que o professor que deseja utilizar a modelação matemática tenha estudado e se preparado para isso, tenha um bom planejamento do processo, tenha criatividade para fazer as devidas adaptações e domine os principais tópicos de Análise Combinatória, concluímos que é possível fazer um trabalho que favoreça o ensino dessa disciplina.

Tal favorecimento é possível porque a modelagem torna as aulas de matemática mais atraentes e agradáveis, possibilitando aos alunos utilizar a matemática em diferentes situações do dia-a-dia, relacionar sua realidade sócio-cultural com o conhecimento escolar e prepará-los para a vida real, como cidadãos atuantes na sociedade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BIEMBENGUT, Maria Salett. *Modelagem Matemática & Implicações no Ensino e na Aprendizagem de Matemática*. Blumenau: Editora da FURB, 2004.

BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2004.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática – Novo Ensino Médio (Volume Único).* São Paulo: Editora Ática – 2005.

PINHEIRO, C. A. M. SÁ, P. F. *O Ensino de Análise Combinatória: A Prática Pedagógica Predominante Segundo os Docentes.* Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC37047990259T.doc

SABO, Ricardo Dezso. *Análise de livros didáticos do ensino médio: um estudo dos conteúdos referentes à combinatória.* Monografia em Educação Matemática. Santo André, 2007.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: Matemática*/ Secretaria da Educação Fundamental. – Brasília: MEC/ SEF, 2000.

PLACAS DE IDENTIFICAÇÃO DE VEÍCULOS NO BRASIL. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2009. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Placas_de_identifica%C3%A7%C3%A3o_de_ve%C3%ADculos_no_Brasil&oldid=18150161>. Acesso em: 1 dez. 2009.